数学I・A　第4問

すべての場合の数は　$4^4 = 256$（通り）

(1) a, b, c, d の最大の数が3以下であるのは，a, b, c, d がそれぞれ1〜3のいずれかのときであるから，その場合の数は

$$3^4 = {}^{アイ}81 \text{（通り）}$$

a, b, c, d の最大の数が4である場合の数は，すべての場合の数から，最大の数が3以下である場合の数を引いた値に等しいから

$$256 - 81 = {}^{ウエオ}175 \text{（通り）}$$

(2) 3つの数 a, b, c について，$a < b < c$ となる場合の数は，1〜4の4つの数字の中から異なる3つの数字を選び，小さい順に並べる場合の数と等しいから

$$_4C_3 = {_4C_1} = 4 \text{（通り）}$$

よって，4つの数 a, b, c, d について，$a < b < c$ となる場合の数は

$$4 \times 4 = {}^{カキ}16 \text{（通り）}$$

(3) (i) 得点が1点であるとき　$d - a + 1 = 1$　よって　$d = a$

$a \leqq b \leqq c \leqq d$ であるから　$a = b = c = d$

よって，得点が1点となる場合の数は4通り

ゆえに，得点が1点となる確率は　$\dfrac{4}{256} = \dfrac{{}^{ク}1}{{}^{ケコ}64}$

得点が4点であるとき　$d - a + 1 = 4$　よって　$d = a + 3$

a, d は1〜4のいずれかであるから　$a = 1, d = 4$

$a \leqq b \leqq c \leqq d$ であるから　$1 \leqq b \leqq c \leqq 4$

(※) これを満たす (b, c) の組は

$(b, c) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4),$
$(3, 3), (3, 4), (4, 4)$

の10通り

ゆえに得点が4点となる確率は　$\dfrac{10}{256} = \dfrac{{}^{サ}5}{{}^{シスセ}128}$

（(※)の別解）

$1 \leqq b \leqq c \leqq 4$ となる (b, c) の組の数は，1〜4の数字の中から重複を許して2つの数字を選び，大きくない方を b とする場合の数と等しいから

$$_{4+2-1}C_2 = {_5C_2} = 10 \text{（通り）}$$

（つづく）

(3) (ii) 得点が3点であるとき　$d-a+1=3$　よって　$d=a+2$

a, d は1～4のいずれかであるから，(a, d) の組は

$(a, d)=(1, 3), (2, 4)$

の2通り

[1] $(a, d)=(1, 3)$ のとき　$1 \leqq b \leqq c \leqq 3$ を満たす (b, c) の組は

$(b, c)=(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)$

の6通り

[2] $(a, d)=(2, 4)$ のときも [1] と同様にして，(b, c) の組は6通り

[1], [2] から，得点が3点である場合の数は　$2 \times 6 = 12$ (通り)

よって，得点が3点となる確率は　$\dfrac{12}{256} = \dfrac{3}{64}$

同様にして，得点が2点となる確率は　$\dfrac{3 \times 3}{256} = \dfrac{9}{256}$

したがって，得点の期待値は

$$1 \times \frac{1}{64} + 2 \times \frac{9}{256} + 3 \times \frac{3}{64} + 4 \times \frac{5}{128} = \frac{{}^{ソタ}49}{{}^{チツテ}128}$$

([1]の別解)　(i) の別解と同様にして，(b, c) の組の数は

$${}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = 6 \text{ (通り)}$$