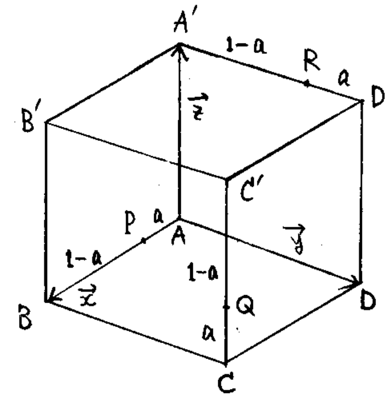
第3問



(1) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}=({}^{ア}1-{}^{イ}a)\vec{x}+\vec{y}+{}^{ウ}a\vec{z}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'R}=-a\vec{x}+\vec{z}+(1-a)\vec{y}$

$={}^{エオ}-a\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}$

ここで，ABCD−A'B'C'D' は，1辺の長さ1の立方体であるから

$|\vec{x}|=|\vec{y}|=|\vec{z}|=1$ ， $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{z}=\vec{z}\cdot\vec{x}=0$

よって，一般に $(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z})\cdot(\alpha'\vec{x}+\beta'\vec{y}+\gamma'\vec{z})=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'$ である。

ゆえに，$|\overrightarrow{PQ}|^2=(1-a)^2+1^2+a^2=2a^2-2a+2$ ， $|\overrightarrow{PR}|^2=(-a)^2+(1-a)^2+1^2=2a^2-2a+2$

したがって $|\overrightarrow{PQ}|^2:|\overrightarrow{PR}|^2=1:1$ よって $|\overrightarrow{PQ}|:|\overrightarrow{PR}|=1:{}^{カ}1$

また $|\overrightarrow{PQ}|^2={}^{キ}2(a^2-a+{}^{ク}1)$

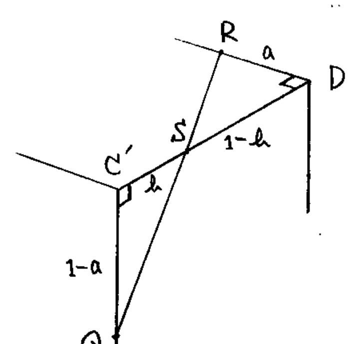
また $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(1-a)\cdot(-a)+1\cdot(1-0)+a\cdot 1=a^2-a+{}^{ケ}1$

$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq 180°)$ とすると $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{a^2-a+1}{\{\sqrt{2(a^2-a+1)}\}^2}=\dfrac{1}{2}$

よって $\theta={}^{コサ}60°$

(2) $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}=-\vec{y}+a\vec{x}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR})$

$=-\vec{y}+a\vec{x}+\dfrac{1}{3}\{(1-a)\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}+(-a)\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}\}=\dfrac{{}^{シ}1+{}^{ス}a}{{}^{セ}3}(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})$



$C'S:SD'=\ell:(1-\ell)$ とすると，三平方の定理から

$SQ^2=\ell^2+(1-a)^2$ ， $SR^2=(1-\ell)^2+a^2$

$SQ^2=SR^2$ から $a=\ell$ よって $\overrightarrow{C'S}={}^{ソ}a\overrightarrow{C'D'}$

ゆえに $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SD'}+\overrightarrow{D'D}=(1-a)(-\vec{x})-\vec{z}$

$=({}^{タ}a-{}^{チ}1)\vec{x}-\vec{z}$

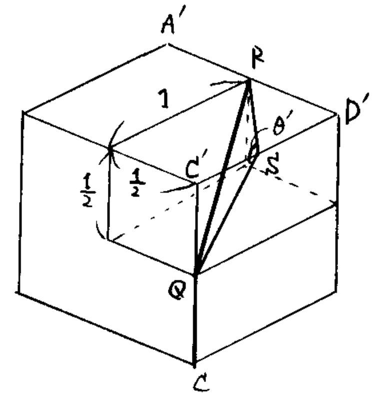
(3) $\overrightarrow{SG}\cdot\overrightarrow{DG}=(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DG})\cdot\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{DG}+|\overrightarrow{DG}|^2$

$=\left\{(a-1)\cdot\dfrac{1+a}{3}+(-1)\cdot\dfrac{1+a}{3}\right\}+\left(\dfrac{1+a}{3}\right)^2\{1^2+(-1)^2+1^2\}=(1+a)\cdot\dfrac{2a-1}{3}$

$0<a<1$ であるから $\overrightarrow{SG}\cdot\overrightarrow{DG}=0$ のとき $a=\dfrac{{}^{ツ}1}{{}^{テ}2}$

このとき，Q, R, S は それぞれ，CC', D'A', C'D' の中点である。

よって $RS=SQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



また，RQ は 右の図のような直方体 (3辺が $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1) の対角線 であるから $RQ^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2=\frac{3}{2}$

$\angle QSR=\theta'$ $(0°\leqq\theta'\leqq 180°)$ とすると，余弦定理により

$\cos\theta'=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{1}{2}$ よって $\theta'={}^{トナニ}120°$