第2問

(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき　$g(x) = \int_0^x t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = \dfrac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イ}}2}x^{{}^{\text{ウ}}2}$

$x \geqq 3$ のとき　$g(x) = \int_0^3 t\,dt + \int_3^x (-3t+12)\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^3 + \left[-\frac{3}{2}t^2+12t\right]_3^x$

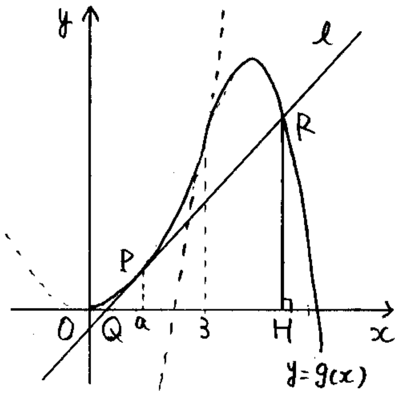
$= -\frac{3}{2}x^2 + {}^{\text{エオ}}12x - {}^{\text{カキ}}18$

(2)　$0<x<3$ のとき　$g(x) = \frac{1}{2}x^2$，$g'(x) = x$ であるから

$P(a, g(a))$　$(0<a<3)$ における接線 l の傾きは

$g'(a) = {}^{\text{ク}}a$，l の方程式は　$y = a(x-a) + \frac{1}{2}a^2$

よって　$y = ax - \dfrac{{}^{\text{ケ}}1}{{}^{\text{コ}}2}a^2$



(3)　$ax - \frac{1}{2}a^2 = 0$ とする。　$a \neq 0$ であるから

$x = \frac{1}{2}a$　よって　$Q\left(\dfrac{{}^{\text{サ}}1}{{}^{\text{シ}}2}a, 0\right)$

グラフから，R は　$x>3$ の位置にある。

よって，(1) から　$-\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18 = ax - \frac{1}{2}a^2$

整理すると　$3x^2 + (2a-24)x + (6-a)(6+a) = 0$

よって　$\{3x-(6+a)\}\{x-(6-a)\} = 0$

ゆえに　$x = \dfrac{a+6}{3}$，$6-a$

$0<a<3$ であるから　$\dfrac{a+6}{3} < 3 < 6-a$

よって，R の x 座標は　$6-a$

このとき，l の方程式に代入すると　$y = a(6-a) - \frac{1}{2}a^2 = 6a - \frac{3}{2}a^2$

ゆえに　$R\left({}^{\text{ス}}6-a,\ {}^{\text{セ}}6a - \dfrac{{}^{\text{ソ}}3}{{}^{\text{タ}}2}a^2\right)$

(4)　図から　$S = \frac{1}{2}\left\{(6-a) - \frac{1}{2}a\right\} \times \left(6a - \frac{3}{2}a^2\right) = \dfrac{{}^{\text{チ}}9}{{}^{\text{ツ}}8}a^3 - {}^{\text{テ}}9a^2 + {}^{\text{トナ}}18a$

$S' = \frac{27}{8}a^2 - 18a + 18 = \frac{9}{8}(3a-4)(a-4)$

増減表から，S は　$a = \dfrac{{}^{\text{ニ}}4}{{}^{\text{ヌ}}3}$　のとき最大値をとる。

a	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	3
S'		+	0	−	
S		↗	極大	↘	