数学I・A　第2問〔2〕

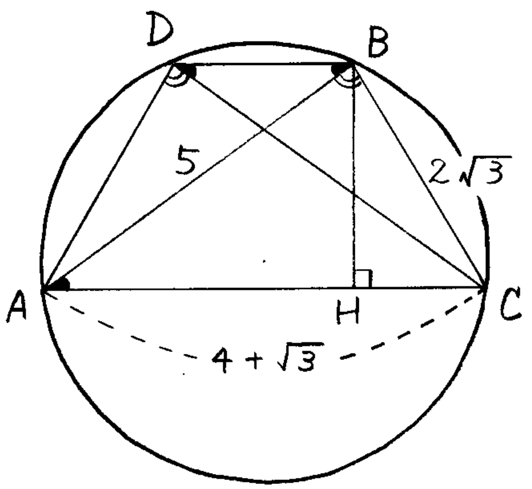
余弦定理により

$$\cos A=\frac{AB^2+CA^2-BC^2}{2AB\cdot CA}=\frac{5^2+(4+\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 5\cdot(4+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{32+8\sqrt{3}}{10(4+\sqrt{3})}=\frac{8(4+\sqrt{3})}{10(4+\sqrt{3})}=\frac{{}^{コ}4}{{}^{サ}5}$$

このとき　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

よって，△ABCの面積は　$\frac{1}{2}AB\cdot CA\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(4+\sqrt{3})\cdot\frac{3}{5}=\frac{{}^{シス}12+{}^{セ}3\sqrt{{}^{ソ}3}}{2}$



右の図において，AC // DBであるから

$\angle BAC=\angle ABD$

また，$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角について

$\angle BAC=\angle BDC$

よって　$\angle ABD=\angle BDC$ ……①

また，$\overset{\frown}{AC}$に対する円周角について

$\angle ABC=\angle ADC$ ……②

①＋②から　$\angle ABD+\angle ABC=\angle BDC+\angle ADC$

すなわち　$\angle CBD=\angle ADB$

したがって，台形ADBCは等脚台形である．

Bから辺ACに垂線BHを下ろすと

$AH=AB\cos A=5\cdot\frac{4}{5}=4$

ゆえに　$CH=AC-AH=(4+\sqrt{3})-4=\sqrt{3}$

よって　$BD=AC-2CH=(4+\sqrt{3})-2\sqrt{3}={}^{タ}4-\sqrt{{}^{チ}3}$

また　$BH=AB\sin A=5\cdot\frac{3}{5}=3$

したがって，台形ADBCの面積は

$$\frac{1}{2}(AC+BD)\cdot BH=\frac{1}{2}\{(4+\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})\}\cdot 3={}^{ツテ}12$$