

曲面の展開図に注目した 中学校数学の図形領域における定義活動の実践例

こんどう ゆうじ
近藤 裕司

1. はじめに

中学校学習指導要領解説数学編 (2018) の中で図形領域における指導について、「論理的に考察し表現できるようにすることが中学校数学科における指導の大切なねらいの一つである。」(p.45) との記述がある。そしてさらに、図形を直観的に捉え、数学的な推論により考察して表現をするという資質・能力を育てることを目指すとされている。本稿では、これらに注目をして中学校第3学年を対象に、図形領域での定義活動として行った授業実践を紹介する。

この授業では、曲面の展開図を考察対象として取り上げた。展開図は空間図形を理解するための重要な概念であり、さまざまな用いられ方がある。展開図を利用して考える問題として、次のようなものがよく扱われる。

(問) 円錐の底面の円周上の1点から、側面を一周して元の点に戻るようにひもをかける。
ひもの長さが最短になるときのひもの長さを求めよ。

この問題は、側面の展開図であるおうぎ形をかき、中学校第3学年であれば三平方の定理を、高等学校第1学年であれば余弦定理を使って長さを求めることができる。側面上での長さはそのままでは考えにくい、展開図を用いて平面上での長さに置き換えることで考えやすくなるという問題であり、図形を直観的に捉える能力が重要となる一例であると言える。

空間図形の展開図は小学校第4学年において初めて扱うことになっている。そこではまず、直方体と立方体について学ぶ。これらの展開図は「辺に沿って切り開き、平面の上に広げた図」として定義されている。その後、角柱・円柱の展開図を学び、中学校第1学年で円錐の展開図を学ぶ。このようにさまざまな空間図形の展開図を扱ってきてはいるが、教科書の中で定義が書かれているのは直方体と立方体のところのみである。特に円柱や円錐といった辺をもたないものについては、初めの定義では展開図を定義することはできない。しかし生徒たちは、円柱や円錐の展開図を理解することができないということはなく、直観的には考察したり表現したりすることができる。これらのことを踏まえ、図形領域において直観的に考えてきた対象を改めて考え直し、その定義を考えさせるための授業の1つとして曲面の展開図を題材にした。

なお本稿は、近藤 (2025) において執筆した内容を再編したものである。

2. 定義活動について

ここでは定義活動について触れておく。村田 (2020) の中で定義活動とは、「ある目的を達成するために、他者と相互作用しながら、対象の例や性質を検討し、その対象の定義を、数学的定義の要件に基づいて、構成、改訂していく活動」として定められている。なお、数学的定

義とは、考察する対象を識別したり、議論の基盤を確立させたりするためのものであるとされている (Borasi 1992, 村田 2020)。

定義という概念は中学校第2学年の証明する活動の中で導入される。それまでは、具体例で説明ができれば十分ではあるが、一般性を失うことなく証明をする中で必要なものが定義であり、上でも述べた通り、考察対象を識別する物である。教科書の中でよく扱われている題材としては、二等辺三角形の形をした紙を頂角の二等分線を軸に半分に折ると底角が重なるということから、二等辺三角形の底角は等しいという性質を見出すというものがある。具体物としての紙を操作することで二等辺三角形の性質に気づくことはできても、あくまで推測に過ぎない。任意の二等辺三角形に対して成り立つということを証明するためには、一般性を失わずに対象を識別できる定義を用いる必要がある。

上では定義の必要性を述べたが、現状の学校数学における定義に関する問題点として清水 (2000) の中では、生徒が定義の妥当性について吟味する機会が少ないということが指摘されている。この点に注目して、与えた定義を再考察する場面をこの実践で取り入れた。

3. 行った授業実践について

ここでは、実際に行った実践について述べていく。中高の数学では、展開図の文脈で扱われる曲面はすべて展開図がかけるものである。しかし、すべての曲面に対して展開図がかけられるわけではなく、そのようなものの中で最もよく知られているであろう例が球面である。本稿で述べる実践は、球面の展開図を考えさせることをきっかけとし、国立大学附属中学校の第3学年を対象に行ったものである。曲面の展開図がかけるための必要十分条件を考察するという過程の中で、曲面の展開図の定義を考えさせるという場面を設定した。

第一時ではまず、2種類の世界地図として舟型多円錐図法とダイマクション地図によるものを紹介し、それらを組み立てた立体を提示した。その立体を観察させ、元の2種類の地図は地球の表面の展開図と言えるかどうかを考えさせた。どちらの立体についても角ばった部分があり球面ではないということから、元の地図は展開図とは言えないことを確認した。このことを踏まえ、球面の展開図を得るにはどのようにすればよいだろうかということを考えさせた。図1, 2は、生徒たちが考えたアイデアである。どの考え方も「細かく切って開く」という部分が共通していた。そこで「どれくらい細かく切ればよいか?」と問いかけると、「十分細かく」や「限りなく細かく」といったあいまいな回答が返ってきた。ここで、算数の教科書では直方体と立方体の展開図が「辺に沿って切り開き、平面の上に広げた図」として定義されていたことを振り返り、球面の展開図を考えるときに何か困ることはないかと尋ねた。すると生徒は、辺をもたない曲面の場合には同様に定義することができないということに気づいた。そこで、「切り開く」という言葉を用いずに曲面の展開図を定義することはできないかを考えさせた。ごみ取りローラーの転がす様子を見せるなどして、「切り開いたもの」から「転がして写しとったもの」へと発想を転換させ、曲面の展開図を「平面上で滑らずに転がして写しとった平面図形」として定義をした。ただしこの定義は第三時で修正を加えた。

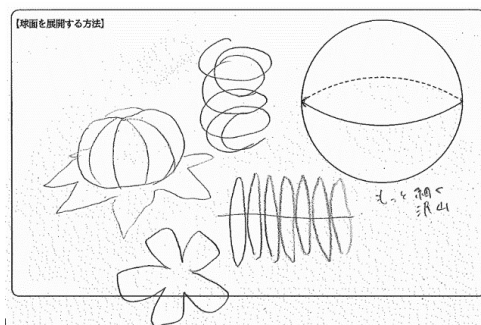


図1 球面を展開する方法案1

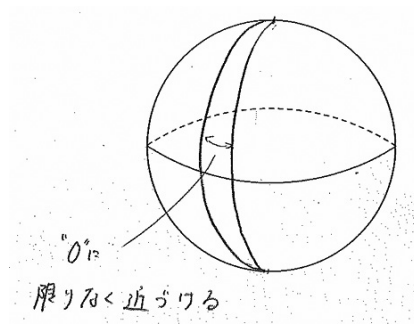


図2 球面を展開する方法案2

第二時は、前時での定義を踏まえ、どのような条件を満たす曲面であれば展開図がかけられるかを考えさせた。展開図がかけるといっていることを知っている円柱・円錐と球面を比較させ、前者の特徴を探らせた。多くの生徒が母線の存在には気づいたが、それだけでは不十分である。実際に、神戸ポートタワーの側面に見られるような一葉双曲面という曲面は、母線は存在するが展開図がかけないことが知られている。タワーの写真を見せさらに観察をさせることで、円柱と円錐は転がしたとき、母線が常に平面に接し続けるということに気づいた。そして、展開図がかけられるための十分条件として「曲面が常に平面と直線的にくっつくことができる」とした。

第三時では、前時の逆として、展開図がかけられるための必要条件を考えさせた。この時点では「球面は平面と点でくっつくから展開図はかけない」という意見が多かった。そこで初回の定義に戻り、球面を平面上で転がすとどのような図形が写しとられるかを考えさせ、線ができるということを確認した。そこで、「球面の展開図は線になるということなのでは？」と問うた。すると生徒たちは以下のような違和感を挙げた：

- ・線を組み立てても元の球面になるのか？
- ・線には太さや面積がない。
- ・展開図の面積がなくなってしまう。

生徒たちは、展開図には面積があるはずだということを根拠にこれらの意見を述べた。そこで、展開図の定義を改めて考えさせ、「平面上で滑らずに転がして写しとった平面図形であって、面積があるもの」と修正した。新しい定義のもと、曲面と平面の接し方に関して場合分けをして考え、前時の条件は曲面の展開図がかけられるための必要十分条件であるとまとめた。

4. 終わりに

今回の実践の狙いは、直観的に考えてきた展開図をとらえ直し、曲面の展開図がかけられるかどうかを調べる中で、そもそも展開図とは何なのかを考えさせることだった。授業後に生徒たちが書いた感想を以下に載せる。図3にあるように、これまで当たり前に感じ直観的に考えていたことを、改めて考え直させることができたように思える。

なるほどと感じたこと、おもしろいと感じたこと、疑問に感じたことなど、感想を自由に書いてください。

自分たちが今まで当たり前のように習っていた物事も、実はあの場面や
世界では成り立たず、非常に成り立たないと感じた。そのうち
根本的やり方と考えるのも大切なのではないか。

図3 生徒の感想1

展開図の解釈はほんとにこれ良いのかな...
→逆に他の定義に解釈を変えると結論も変わるのかな?

図4 生徒の感想2

また、図4は展開図の定義に関して述べたものであるが、それ自体を疑うということをしている。そもそも定義というのは絶対的である必要はなく、満たすべき性質が考慮されていればよい。だからこそ、定義を定めるという行為は難しいのである。今回の授業を通して、普段はなかなか考えさせることができない「数学的概念の定義」を意識させることができた。展開図の定義そのものや展開図がかけられるための必要十分条件およびその証明には、まだ課題が残っており完全なものではない。ただ、定義活動という面においては価値のある実践ができたのではないかと思う。

参考文献

1. R. Borasi: *Learning mathematics through inquiry*, Portsmouth NH: Heinemann, 1992.
2. 近藤裕司: 曲面の展開図がかけられるための必要十分条件を考察する授業実践—定義活動の視点から—, 中等教育研究紀要, 広島大学附属福山中・高等学校, 2025.
3. 文部科学省: 中学校学習指導要領(平成29年告示)解説数学編, 2018.
4. 村田翔吾: 数学的探究における定義活動の方法に関する研究—規範的側面に焦点を当てて— 日本数学教育学会誌数学教育学論究, 2020, 114, 19-38.
5. 清水美憲: 数学的定義の構成活動による定義の役割の理解に関する研究—教授実験を通して— 日本数学教育学会誌数学教育学論究 2000, 73・74, 3-26.

(広島大学附属福山中・高等学校 教諭)