

数学が「わかる」とは

なるかわ やす お
成川 康男

1. はじめに

新学期になり、どこの学校でも新たな生徒との出会いを迎えていることと思います。まずは、担当する生徒の実態を把握することが大切です。生徒たちは何ができる何ができないか、何が「わかって」いて何が「わかって」いないか、これらのことを把握して授業の計画を立てないと、せっかく準備した授業が空回りしてしまいかねません。では、数学が「わかる」「わからない」とはどのようなことなのでしょう。このことは、さまざまな分野の人たちが、それぞれの立場から論じていることでもあります。

数学教育の研究では、平成19年度からの3年間、奈良教育大学の吉田明史教授（当時）が代表者となった科学研究費の基盤研究『わかる数学の授業を構築するための基礎研究』があり、850ページもの分量があるその報告書には、先行研究の調査、教員の「わかる」についての意識調査、数学の分野ごとの「わかる」の特徴、「わかる授業」の実践例などが記載されています。

こうした「わかる」ことの研究のいくつかを比較検討し、数学教育に生かす指針を考えることは、私の研究室の卒業研究のテーマとして、学生に人気があります。学生たちの研究事例をふまえて、「数学がわかる」とはどのようなことを表すのかを示していきたいと思います。

2. わかるということ

本題に入る前に、「わかる」ということについて考えてみたいと思います。心理学や認知科学で、一般的に「わかる」ということは、自分のこれまでの経験や既有知識と結びつけることであるといわれています。幼少期や小学校時代の豊かな経験や知識がないと、わかることにつながりません。鶴と亀（の足の数）を知らずに、鶴亀算がわかったとはいえません。機械的に式を作り、そこから答えを出すことができたとしても、それが「わかった状態でない」ということは明らかでしょう。新しく扱う内容が生徒の生活体験と結びつかないとき、生徒は「わからない」と感じるものです。このことは、絶えず心に留めておく必要があります。

「スキーマ (Schema)」あるいは「シエマ (Schème)」という言葉は、理解について説明する上で欠かせない言葉です。認知心理学の創始者の一人であるバードレットは、「人間は過去の経験に基づいた知識の枠組み（スキーマ）を持っており、新しい情報を記憶・再生する際、そのスキーマに沿って情報を整理・解釈する」としています。新しい情報に触れたとき、それを既存のスキーマに当てはめて解釈できたときに「わかる」という感覚が生じるということです。

認知発達理論で名高いピアジェで重要な概念が「シエマ」です。「子どもは、新しい経験や

情報を通じてシエマを形成し、それを基にして世界を理解する」としています。シエマは成長と共に変化し、新しい情報が既存のシエマと合わない場合、子どもはシエマを修正したり新たなシエマを作り出す「同化」と「調整」というプロセスを通したりすることで、認知能力を発展させます。

スキーマもシエマも、経験に基づいて形成されるものであり、それをもとに、新たな情報が「わかるようになる」ということでしょう。別の分野では「表象」という言葉が使われることもあります。表象とは、「知覚した対象を心の中に思い浮かべるイメージや、脳内にある知識の構成物を指す」ということです。

このように、あまり聞き慣れない言葉で出てきましたが、経験に基づいて頭の中で構成するイメージとの繋がり、これがどれにも共通する「わかること」の第一歩であるといえそうです。

3. いろいろな「わかる」→ 数学が「わかる」

「数学がわかる」をテーマに研究している学生たちの論文には、山鳥重氏の名前がよく登場します。山鳥氏は神経内科が専門の医学者です。彼は、脳に損傷を生じたため認知障害をきたした人たち、言い換えると、それまで普通にわかっていたことがわからなくなった人たち、の診断や治療を行ってきました。その著書『「わかる」とはどういうことか ― 認識の脳科学』（ちくま新書）では、わかるとはどういうことなのか、すなわち認識の仕組みについて、専門的な用語や表現をなるべく使わずにうまくまとめています。

わかることの土台となるのは記憶です。記憶については心理学を中心に数多くの研究があるのですが、ここでは記憶を、経験による「A：出来事の記憶」、それが重なってできるイメージの「B：意味の記憶」、繰り返しやってみることで身につく「C：手続きの記憶」に分類しています。

この3つの記憶は、数学教育にも重なる部分が大きいと思われます。「A：導入の部分で、ある経験をさせる、あるいは経験とのつながりを付ける」、「B：いくつかの共通部分を重ね合わせて、その単元のイメージを作る」、そして「C：ある程度の反復により、手続きとして定着させる」というわけです。

次に、「わかる」にもいろいろあるということで、次の6種類を挙げています。

1. 全体像が「わかる」、 2. 整理すると「わかる」、 3. 筋が通ると「わかる」、
4. 空間関係が「わかる」、 5. 仕組みが「わかる」、 6. 規則に合えば「わかる」

これらのことを中学校の数学に置き換えて考えてみましょう。

新しい学習内容が始まるときには、メインとなる考え方を含んだ題材が取り上げられます。これは、1. 全体像が「わかる」を意図したものといえるでしょう。毎回の授業の後半では、多くの場合本日のまとめが行われます。これは、2. 整理すると「わかる」を意図しています。たとえば、等式の移項ができる根拠を示させるのは、3. 筋が通ると「わかる」を意図し、直線に等間隔に数を割り振る数直線の考え方は、4. 空間関係が「わかる」ということにつながります。平方根の中が自然数の平方であるときの扱いなどは、5. 仕組みが「わかる」を意図

したものといえるでしょう。正負の数や文字式の計算で生徒の誤答の中には、何らかの規則があることがあります。数学的には誤りであるけれども、自分なりの規則を作って6. 規則に合えば「わかる」を実現しようとしているように見えます。

数学が「わかる」ことについては、これだけでは説明できないものもあるように思います。数学では、言葉の意味を定めた定義、議論の出発点になる公理から演繹的に次々と定理を証明していくという「型」があります。数学（特に現代の数学）に馴染むと、今までわかっていたことが「わからなく」なります。たとえば、自然数やその加法は小学校算数で学ぶ内容ですが、私は学生時代にペアノの公理系を知り、それをもとに $1+2=3$ などの証明をすることで、ようやくわかった気がしました。このように、「型」に沿って自ら概念を操作する体験をしてみることも数学が「わかる」状態をつくる方法なのだと思います。杉山吉茂『初等科数学科教育学序説』東洋館(2008)では多くのページをペアノの公理系について割いていますので、参考までにご紹介します。

4. 卒業研究から

私の研究室の「わかる研究」では、スケンプ『数学学習の心理学』新曜社(1973)や佐伯胖(編)『理解とは何か』東京大学出版会(1985)などを基礎文献として、それぞれ、新たな理解に関する文献を追加してその内容を比較検討することを研究のとりかかりの一つとしています。

さらに、工学部マネジメントサイエンス学科ということで、学科のカリキュラムの中で学んだ、情報科学、認知科学やデータマイニングの手法を応用することを心がけています。

榊原(2021)は、前に紹介した山鳥氏の文献を中心に数学における「わかる」の種類について整理し、三平方の定理の証明や中学校の文章題を題材にして分析しました。

2022年からは、実験を伴う研究になってきました。島袋・山田(2022)は畑村洋太郎『直観でわかる数学』岩波書店(2005)の内容も追加しました。また、エントロピーの計算によって「わかる」までの変容を考察し、図の必要性に関する実験を大学生対象に行いました。また、小池(2022)は、中学校の文字式の生徒の個別指導の記録をもとにテキストマイニングを行い、数学で使われる動詞の役割について考察しました。

2023年からは、個別指導の発話の録音・録画から、テキストマイニングをするようになりました。大村(2023)は参考文献に波多野誼余夫『学習と発達』東京大学出版会(1996)を追加し、漸化式を作る問題の「わかる」過程の分析を行いました。その結果、日常世界と抽象世界との繋がりを密接にした指導が必要であるとしています。石黒・村山(2024)は、前述の科研費報告書も参考にし、関数がわからない高校生の指導で分析を行い、問題を可視化して式を作ることの重要性を指摘しました。

最も新しいものでは、卜部・胡桃沢(2025)は鈴木宏昭らの『教科理解の認知心理学』新曜社(1989)と西林克彦『「わかる」のしくみ』新曜社(1997)も追加し、どのような支援が必要で有効であるかを明確にするため、割合と比が得意でない高校生・大学生の学習指導の過程を記録し分析を行いました。そこでみられたのは、割合と比における計算過程において誤った統一

的文脈の形成、分数に関する行為スキーマの不十分さ、各学習者で理解を促す問題スキーマの違いでした。漆島・大島(2025)は空間図形に挑戦しました。宮口幸治『コグトレ』三輪書店(2015)を認知機能強化トレーニングとして行い、空間図形が「わかる」過程の分析を高校生・大学生を対象に行いました。空間図形が捉えられなかった生徒に対して、コグトレで一定の空間認知力の向上がみられたことや、空間図形における平行の関係を意識することで「わかる」に繋がるという結果を得ました。

これらのなかで「わからない」という生徒・学生に共通しているのは、数や式を機械的に操作することはできても、豊かな図的イメージを伴わないため実感がわからない、条件が異なると手も足も出なくなるということでした。たとえば「比はかけるもの」という操作だけを方略にしている学生が複数いました。これで、一定の割合で問題には正解することができます。しかし、会話してみると到底「わかっている」状態ではなく、少し違うことを聞くとまったく見当はずれのことを発言したりします。いくつもの著作を読んできましたが、これらに共通しているものでもあります。理解に必要なのは、ある種の言語にならないイメージであり、それを得るための深い体験・経験が大切ということでしょう。

5. 最後に

2022年から数学が「わからない」人を指導する際の発話を記録し、テキストマイニングの手法で分析するということを行っています。そこで、出てきたのは動詞の理解に問題があるということでした。「合わせる」「分ける」「入れる」「表す」「移す」など私たちが当然わかっていると思われるもので躓いているということでした。

私たちがよく使う「代入する」「入れる」などという言葉も、子供の経験からすると繋がっていないことがあるということです。その結果、どんなに一生懸命指導しても「わかる」ようにならないということになります。動詞は、言葉で説明しても伝わりにくく、いくつかの共通の動作を重なり合わせてそのイメージを形成していくことしかないように思えます。

教材研究をする際に、教材の文章中にふくまれる「動詞」に着目して、もし生徒がそれをわかっていないとしたらどのように指導すればよいのかを考えることも、「わかる」生徒を増やすことに繋がると思われます。

〈参考〉玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科 卒業論文より

榊原大輝 『数学の理解について』 2021 年度

小池和希 『授業外における個別の学習支援』 2022 度

島袋桃花 山田怜 『数学における理解の構造』 2022 年度

大村友也 『数学における新しい内容の理解』 2023 年度

石黒健心 村山文也 『数学におけるわかる瞬間』 2024 年度

卜部菜心 胡桃澤百萌 『割合と比の理解』 2025 年度

漆島楓香 大島有梨那 『空間図形がわかるとは』 2025 年度

(玉川大学 教授)