

図形領域における証明指導のヒント

はかまた りょうと
袴田 綾斗

今回は「図形領域における証明」というテーマで、数学教育の研究や実践を通して得られた知見を盛り込んで、いくつかのトピックについてお話していきます。

1. 予想する活動の重要性——認知的統一性

「数学の授業では予想を立てさせることが大切だ」というのは、すでによく知られていることだと思います。あるいは経験知として実感されている方もいるでしょう。しかし多くの場合その大切さは、生徒を主体的に学習活動に臨ませるための手立てとして「大切だ」と捉えられていると思われます。また、教師が証明すべき図形の性質を提示するのではなく、生徒が自ら予想することが大切なのだ、という考えもあるでしょう。一方、「証明を生徒に考えさせたり書かせたりするためには、そもそも予想するという活動が重要なのだ」という指摘はあまり聞きません。ここで紹介したいのは、この指摘につながる研究です。

イタリアの研究者グループが提唱した概念に「認知的統一性 (cognitive unity)」があります (Garuti, Boero, & Lemut, 1998)。これは、証明をつくる前の、例をつくったり、パターンを探したり、一般化できるか検討して予想を立てたりする探索活動の重要性を指摘したものです。なぜ探索活動が重要かという、それが証明のアイデアにつながるからです。与えられた問題場面において様々な例やパターンを探索する際に試したことが、いざ証明をつくる段階になったときに、「何がいえるか」「何をいえばよいか」を考えるヒントになります。そして、それらのアイデアを適切につないでいくことで、証明を書くことができるようになります。

例えば、次のような問題を考えてみましょう：

△ABC と △ECD はどちらも正三角形で、点Cを共有しています。このとき、線分ADとBEの長さについて、何がいえるだろうか。

よくある問題ですが、「 $AD = BE$ であることを証明しなさい」のように、証明すべき結論を示さず「何がいえるだろうか」としているところがミソです。このような問いを提示することによって、生徒は条件を満たす様々な例をつくって「いえること」を探すでしょう。図形を描画して動かすことができるアプリケーションを用いれば、生徒一人ひとりがパターンを探索することができます。すると、このような探索の中で「長さや角度が変化する中でも変わらないこと」に注意が向きやすくなります。そして、証明のキーアイデアになる $\triangle ACD \equiv \triangle BCE$ という関係にも気づきやすくなります。こういった探索を通して $AD = BE$ を予想することで、証明をつくる段階では「何をいえばよいか」を考えることの足場になり、結果として、生徒自身が証明を考え、書くことができるようになると期待できます。

一見すると、「 $AD = BE$ であることを証明しなさい」と証明すべき事柄が問題文で提示されていたり、「右の図の $\triangle ABC$ と $\triangle BCE$ において」と特定の図が与えられていたりした方が、生徒にとっては取り組みやすそうです。しかしながら、証明すべき事柄がすでに提示された状況では、探索の余地がほとんどなく、上で見たような証明のアイデアに気づく契機も失われかねません。結局、示すべき結論はわかっているが、そのために何をすればよいのかわからず手が動かない、ということにつながってしまいます。問題場面を探索させ、生徒自身に予想を立てさせることは、証明をつくることにとって重要なのです。

このトピックの最後に、授業に探索活動を取り入れるためのヒントをお伝えします。それは、すでに上で書いたように問題を「何がいえるか」とオープンな問いの形で提示することです。設定された条件のもとで常に正しいといえる事柄を探すことは、仮定を意識しながら結論を探索することと言い換えられます。生徒がある発見をしたとき、他の生徒と共有することで、「それは本当に仮定を満たしているか」「その結論は常に正しいといえるか」という議論も生まれ、論理的に考えることにもつながるでしょう。オープンな問いの形にすることは小手先のテクニックにも見えますが、数学的な考え方を働かせるための手立てにも、そして、証明に関する認知的統一性を高める工夫にもなるという、理論的な裏付けのある指導の方法といえるのです。

2. 何をどう書いたら証明になるの？——証明の書き方の社会性・文化性

次のトピックは証明の書き方・表現方法に関するものです。まず、学習指導要領の解説にある指導上の留意点を見てみましょう。

第2学年における証明の指導では、必要以上に証明の書き方に拘ることをせず、証明を読むことを通じて証明の根拠の用い方を明らかにしつつ、表現に一定の幅をもたせ、生徒が自分なりに工夫して証明し、よりよいものへと互いに高めていくことが大切である。(文部科学省, 2018, p. 47)

証明の書き方に必要以上に拘らなくてよいという指針は、生徒の主体性を活かした授業展開を後押ししてくれる心強いメッセージです。しかし同時に、私には「高いレベルのことが要求されているな」とも感じられます。どこからが「必要以上」の拘りなのか、どこまでが「一定の幅」に収まるズレなのか、といったことには明確な境界線がなく、場面ごとに教師が判断する必要があるからです。

このように書くと、学習指導要領の解説が「この程度の表現の省略は可とする」や「この順序での記述は許容範囲外である」などのような、あるべき証明の姿の提示を怠っているかのよう受け取られてしまうかもしれません。しかし、そのようなことはまったくありません。そもそも学習指導要領やその解説には、詳しく書くほど現場の裁量を小さくしてしまうというトレード・オフの関係があります。もし「これは可」「これは否」という事例を詳細に示してしまうと、今度はそれが教師にとっての拘りの種になってしまうことが懸念されるのです。

しかしながら、証明の許容範囲を明示できないことについては、このような学習指導要領の性格に加えて、より本質的な要因を指摘することができます。それは、そもそも「何をどのよ

うに書いたものが証明と呼ばれるのか」をあらかじめ明確に定めておくことはできないというものです。証明の書き方の適切さは、数学的に決定できるものではありません。フランスのニコラ・バラシェフ氏によれば、証明は当該のコミュニティに受け入れられた推論過程と規定することができます (Balachef, 2024)。つまり、証明はそれを受け取るコミュニティ——それは他の生徒や教師だったり数学者集団だったり様々です——が OK と判断すれば証明とみなされ、NO と判断すればダメなわけです。もちろん、受け入れる側のコミュニティは、好き勝手な基準で判断をするわけではありません。そのコミュニティで共有されている（とみなされている）規範に基づいて可否を判断します。このように、証明の書き方の適切さには、社会的あるいは文化的といえるような側面があるのです。

例えば、アメリカの高校数学では「二列証明 (two-column proof)」という証明の書き方が指導されることがあります。△ ABC において「 $AB = AC$ ならば $\angle B = \angle C$ 」であることの証明を例としてあげると、次のように書かれるのが一般的です。

言明 (Statements)	理由 (Reasons)
1. $AB = AC$	1. 仮定
2. $\angle A$ の二等分線と BC との交点を D とする	2. すべての角は二等分線をもつ
3. $\angle BAD = \angle CAD$	3. 角の二等分線の定義
4. $AD = AD$	4. 反射律
5. $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$	5. SAS 合同条件 (二辺夾角相当)
6. $\angle B = \angle C$	6. 対応する角の相当性

もし、日本の中学生がこのような形式の証明を書いてきたら、担当の教師はどんな反応をするのでしょうか。減点とまではいかずともびっくりするでしょう。「正しいといえば正しいけど、“普通に” 書くようにしようね」と書き方の変更を促すかもしれません。日本の中学校数学の慣習からすると、二列証明の書き方はやや適切さに欠けるもの、少なくともより適切な（普通の）書き方があるものとしてみなされると考えられます。

さて、このような証明の書き方に関する社会性・文化性を前提とすると、証明学習の初期の困難性について、少し解像度を上げて見るできるようになります。証明を学び始めるとき、どのような書き方をすればよいのか、コミュニティへの入門段階にいる生徒にはわかりません。したがって、そのコミュニティの「熟達者」である教師が書き方を指導することになります。しかし、ここで難しいのは、なぜその書き方がよいのか、なぜ他の書き方ではよくないのか、それが「新参者」である生徒にはわからないことです。教師が説明しようにも、「日本の中学校数学でこれまでに培われてきた証明の規範にしたがうと、こういう書き方が適切だと認められるのだ」のように、説明になっていない説明をすることになってしまいます。確かに、「これなら多くの人を納得させられそうでしょ」と、正当化や説得に適した表現方法として証明の合理性を説明することはできます。しかしやはり、「この文言は省略してはダメ」など、慣例が形作っている規範については、最終的な合理化は困難です。

この困難性は証明の社会性・文化性という本質的特徴に根ざしているものであり、個々の教師の工夫によって解消できるものではありません。しかしそれでも、というよりもそれだからこそ、教師はこのような指導上の難しさがあることを意識しておく必要があると私は考えます。教える側に立つ教師も、これまでに積み重ねられてきた慣習から完全に自由であるわけではありません。証明の書き方のスタイルについて、自由に選べる中から最も合理的なものが選択されたと捉えてしまうと、生徒に対して「この書き方こそが正しいのだ」と無理を通すことにつながります。一方、当然ながら証明の書き方は「何でもあり」なわけではありません。証明の社会的・文化的側面を認識しておくことは、「唯一絶対の正しさ」と「何でもあり」の間のバランスをとって指導に臨むためにも重要だと考えます。

3. 教材研究を深めるには？——数学教育の歴史を参考にする

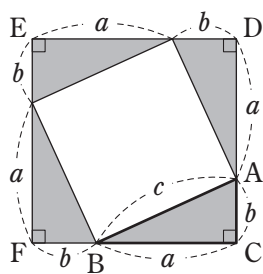
教材研究の文脈で「当たり前とみなしてきた教科書の内容も、別の可能性を探ってみるとより理解が深まる」のようなことを耳にすることがあります。確かにその通りだと思いますが、これは言うは易く行うは難しで、別の可能性を探るためには一定程度の背景知識が必要でもあります。では、どのような知識が役立つでしょうか。最後のトピックとして「数学教育史の知識が教材研究に役立つ」ということをお話ししたいと思います。

以下では、三平方の定理を例にして、幾何教育の歴史からその教材研究を深めて見たいと思います。まず、三平方の定理の証明を見てみましょう。現在の多くの教科書では、下の図のように合同な直角三角形を用いて大きな正方形をつくり、内側の正方形の面積を二通りの仕方で表すことで証明を行います。

$(a+b)^2 - 4 \times \frac{1}{2}ab = c^2$

整理すると $a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = c^2$

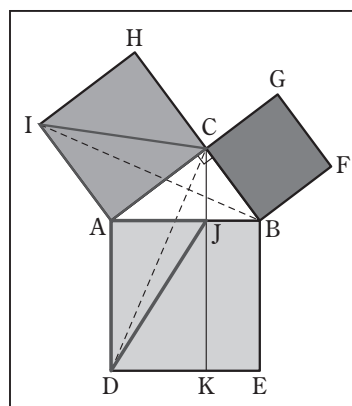
すなわち $a^2 + b^2 = c^2$



幾何教育の歴史の観点からこの証明方法の別の可能性を探ってみます。今回参照するのは明治期の数学教育です。当時、幾何教育の基礎を築いた人物に菊池大麓という数学者がいました。菊池は教授要目、今でいうところの学習指導要領の作成に文部大臣として大きな影響を与えました。この教授要目には「分科主義」という考え方が反映されています。分科主義とは幾何や代数等を個別の学科として独立に扱うことを是とする考え方で、これに基づいて、幾何の問題解決に代数的な手法を持ち込むことは非とされていました。このころの中学校では、上のような三平方の定理の証明は代数的な表現と処理を用いているという点で禁じ手だったのです。

では、代数的ではない、つまり幾何的な方法の証明にはどのようなものがあるのでしょうか。

例えば、等積変形と合同（回転移動）を利用するものがあります。右の図でいえば、 $\triangle CIA = \triangle BIA \equiv \triangle DCA = \triangle DJA$ より、正方形 CHIA と長方形 ADKJ の面積が等しいことが示されます（正方形 CGFB と長方形 BEKJ についても同様）。なお、これは現在の教科書にも発展やコラムとして載っています。



さて、このような歴史があったことを踏まえると、現代の証明がもっぱら代数的な手法によって行われていることが際立ってきます。では、なぜ多くの教科書で代数的な証明が採用されているのでしょうか。考えつく理由を挙げてみると次のようなものがあります。

- 幾何的な証明は書くことが多く、代数的な証明は相対的に書くことが少ないから。実際、代数的な証明の式変形は3行分で済む。
- 幾何的な証明は等積変形や回転移動など動く図形をイメージする必要があるが、それを苦手とする生徒がいるから。
- この単位では三平方の定理を用いた辺（線分）の長さの求値に重きが置かれており、それとの連続性をもたせるためには代数的な証明の方が整合性が高いから。

このような理由があると考えると、確かにこの単位では代数的な証明の方が扱いやすく、理にかなっているように思われます。一方、三平方の定理が「正方形の面積」に関する定理であることに対して、上の幾何的な証明は「主張を直接示している」ということができます。また、ICT機器を利用すれば、動く図形のアニメーションを見せることも容易です。さらに「三平方の定理を証明できることを知る程度とし、生徒の興味・関心に応じて柔軟に取り扱う」（文部科学省，2018，p. 150）ことが重要ですから、幾何的な証明のすべてをきっちり書かせる必要はなく、視覚的に証明を納得できれば十分な場合もあります。

ここでの目的は代数的証明と幾何的証明のどちらがよいか結論づけることではなく、数学教育の歴史を参照することで現在の教育内容の理解が深まる、という教材研究をお見せすることでした。別の在り方を考えることで、代数的な証明の利点も改めて見えてきたのではないのでしょうか。今回のトピックが、これをご覧になった方の参考になれば幸いです。

文献

- Balacheff, N. (2024) Mathematical argumentation, a precursor concept of mathematical proof. In J. Wang (Ed.), Proceedings of ICME 14 (Vol. 2, pp. 33-52).
- Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22nd Conference of PME (Vol. 2, pp. 345-352).
- 文部科学省 (2018). 中学校学習指導要領解説数学編，日本文教出版

（高知大学 講師）

数学教師の指導の引き出しに入れておきたい「垂線・平行線の新たな作図法」と授業におけるその活用の提案

しむら おさむ
志村 修

1. はじめに

中学校の図形（幾何）の学習は、学習する図形に関する定義や性質を積み重ねたり、関連付けたりして進められてきた。その過程の中で、その定理の知識やそれを使いこなす技能を深めていく授業、そしてその定理を活用して課題の解決を図る授業等を行いながら、各定理の良さを認識できるよう指導を行っている。

昭和20年代・30年代の学習指導要領の創成期においては、「幾何はひとつの古典として、学問のまとめ方の手本である」*1：昭和28年10月9日教材等調査研究会数学小委員会記録 という解釈もあり、昭和から平成前期に至っては、幾何の各単元を系統立てて、効率よく、知識・技能を深めていく授業展開に重きが置かれていたと考える。されど、現行の学習指導要領においては、「主体的・対話的で深い学び」が学び方（授業展開）の要になっている。授業をそのように捉えたならば、指導者自身が主体的・対話的で深い学びにつなげる「仕掛け」を絶えず研究していかなければならない。以下に、仕掛けとして活用できる話題・題材を「垂線と平行線の作図」をもとに示していく。

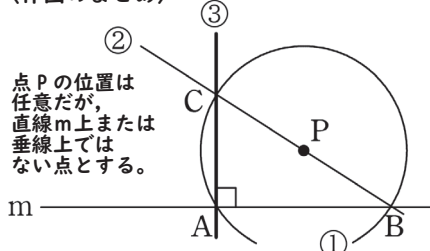
2. 垂線の新しい作図法

様々な教材研究や授業デザインの研究を通して、中学校数学の図形指導では不変ともいえる「垂線の作図法」において、従来の方法とは異なる作図法を見出した。それを提示する。

【直線 m 上の点 A を通る垂線の作図】

- ① 任意の点 P を中心として PA を半径とする円を描く。ただし、点 P は、直線 m 上およびこれから作図をする垂線上にあってはならない。
- ② 描いた円が直線 m と交わる2つの点のうち、 A とは異なる点を B とする。点 B と円の中心である点 P を通る直線 BP を引く。
- ③ 直線 BP と円が交わる点を C とすれば、直線 AC が垂線となる。

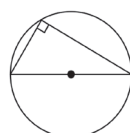
〈作図のまとめ〉



作図の数学的根拠は、見ての通り、対称性でもなく三角形の合同でもない。すなわち、中学1, 2年生が直観的に理解できる作図法ではない。この数学的根拠は、中学3年の円周角の単元で学習する「半円の弧に対する円周角」である。俗にいうタレスの定理である。

【タレスの定理】

円周上の2つの点を結ぶ線分が円の中心を含むならば、その2点と円周上の別の点とを結ぶ2つの線分のなす角（円周角）は、必ず直角となる。



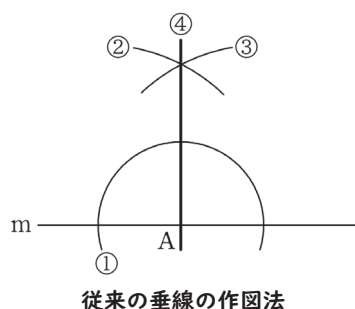
3. 従来の作図法との比較、および垂線の新しい作図法に期待すること

垂線の作図については、戦後の教科書の記述に大きな変化はない。右図の通りである。

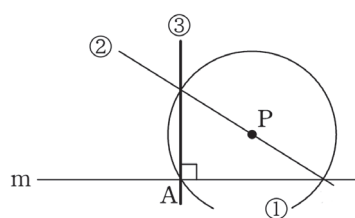
義務教育年齢の生徒にとって、この作図は直観的な理解が容易にでき、かつ三角形の合同などの内容と照らし合わせて、数学的根拠も明確にできる大変優れた作図法である。

コンパスを用いて円や弧を描く、定規を用いて直線を引くといった操作の回数を「操作回数」と定義したとき、今回提示した「垂線の新しい作図法」の操作回数は3回である。この3回は最少回数である。

「操作の最少回数を追求する」という視点で垂線の作図を研究することは意味のあることである。しかし、生徒にとっては、研究する動機付けにはなりにくい。やはり、身近な課題の解決に引用できることを考えさせたり、活用性や利便性の点に触れたりすることで、「この古典（幾何）が学問のまとめで終わる」ことなく、深い学びへつなげられると考える。



従来の垂線の作図法



垂線の新しい作図法

4. 主体的な学び・対話的な学び・深い学びへの扉を開く可能性について

ここで、図形学習の集大成として、新たな学びへの展開例を2つ紹介する。

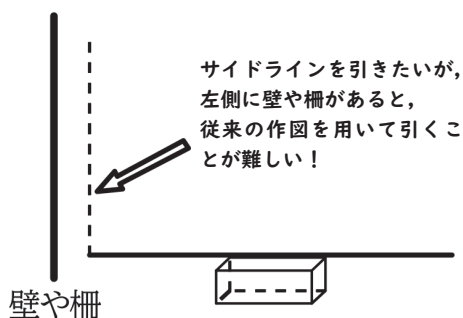
(1) 身近な課題の解決を図る協働的学びへの活用

例えば学校では、校庭でサッカーのコートを整えることがある。しかし、右の図のように、壁や柵が障害となる場合が多々ある。この場合、従来の作図法のコンパスは使用できない。

「コンパスの代用として、ロープを活用できる。」という意見は、生徒からももちろん出てくる。されど、障害となる壁や柵に対しての課題は解決できず、思考を深めるモヤモヤ（葛藤）が生み出される。ここで「協働的学び」を仕掛け、生徒同士による解決を促したい。

一般的には、長方形を作ったり、ピタゴラス数（3：4：5等）を用いて直角を作るといった解決策が、「納得解」になるであろうと推測できる。

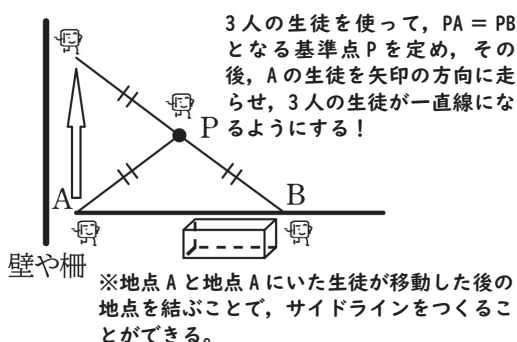
しかし、教師の方でこの「新しい作図法」を理解していたならば、生徒への仕掛け・働きかけは、「深い学び」へとつなげられると考える。



さて、筆者の結論は、右図である。見ての通り、壁や柵の影響を受けることもほぼなく、地面に円を描くことなく、人の移動でサイドライン（直角）をつくることができる。

これは一つの例であるが、その後の部活動や球技大会等で、学習内容を実生活に活用させることができ、生徒にも新しい作図法の良さを伝えることができる。また、同時に、円周角の定理（タレスの定理）を再確認させることもできる。

なお、新しい作図法を活用させる課題は、右図（『これからの数学1』5章探究コンテンツ）の(2)のような、具体場面を想定しない数学の問題として提示することもできる。



課題

次のような線を作図し、その方法を説明しましょう。

ただし、作図の途中の線もふくめて、すべて課題の枠からはみ出さないようにして作図する必要があるものとします。

(1) 線分ABの垂直二等分線 (2) 点Dを通る線分CDの垂線

(2) 今までの価値観を見直し、新しい知識につなげる思考へ

この垂線の作図法だけでも普遍的な価値観を見直す契機にすることができる。されど、学んだことに対して、自らが統合的・発展的考察をすることで、「新しい知識につなげることができる可能性」を、この教材を通して生徒に語りたい。

【平行線の作図への発展】

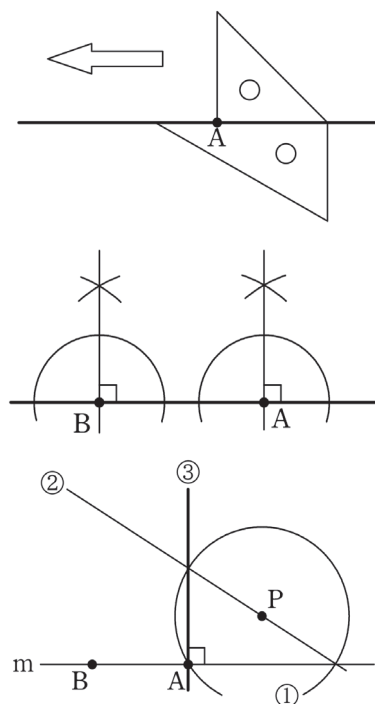
この作図法は、平行線の作図に対しても活用できる。右図は一般的な2枚の三角定規を用いた平行線の引き方であり、生徒も直観的に理解ができる。従来の授業では、この直観的理解をもとに平行線の作図の理解へと進む。

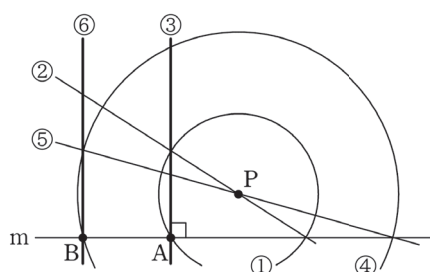
右上の三角定規を滑らせて2本の平行線を引くことは、右のように定規とコンパスで、直線に対する垂線を2本作図することで解決できること、さらに、このことから、中学2年で学習する同位角の定理（公理・公準）につながっていくことは周知の通りである。

一方で、「垂線の新しい作図法」を学んだならば、従来とは違う平行線の作図法が構築できる。それは、コンパスと定規による作図であるにもかかわらず、効率よく平行線を描くことができるものである。その作図を、「直線m上の2点A、Bを通る平行線の作図」を例に紹介する。

まずは「垂線の新しい作図法」で、点Aを通る直線mに対する垂線を作図する。（右図）

続いて、点Pを中心とする同心円を、点Bを通るように描く。点Aからの垂線の作図と





同様に、左図に示す手順で垂線を作図する。

これによって平行線が作図できる。

操作回数は6回で、垂線2本による作図の操作回数(8回)より少ない。しかし、回数よりも「同心円の作図」となることが、効率化につながっていると考える。

5. まとめ

今回の作図法の基盤となっているタレスの定理は、中学校の教科書では、確実に取り上げられる図形(幾何)の定理である。しかし、今回紹介した作図法は、教科書では取り上げられなかったことがない。それは教科書が「学問を系統的に練り上げ、まとめた傑作」だからと考える。この作図法は「練り上げ、まとめられたもの」ではない。次の記述にあるような活動を通して生み出されたものである。

数学が歴史的に発展しているのは、一旦解決された問題やその解決過程を振り返り、問題の条件や仮定を見直したり、共通する性質を見いだしたり、概念を一般化したり拡張したりする活動を数学者たちが続けているからである。したがって、数学の事象についての問題解決の指導に当たっては、振り返ることによる新たな問題の発見を生徒に促すことが大切である。 *文部科学省 中学校学習指導要領(平成29年告示)解説数学編 27 ページより抜粋

指導計画においては、通常の授業における各領域の内容に関する問題解決的な学習を継続し、各領域で学習した内容を総合したり日常の事象や他教科等での学習に関連付けたりするなどして見いだした問題を解決する学習として課題学習を位置付け、各領域の学習が一層深まりをもつように配慮することが大切である。

このような課題学習の指導は、教師にとって数学的活動の本質の理解を促し、教材研究や指導法の改善、カリキュラム・マネジメントの必要性を理解する上でよい機会になる(後略) *文部科学省 中学校学習指導要領(平成29年告示)解説数学編 175 ページより抜粋

実際に、垂線や平行線の作図を、生成AIでどのように示されるかためしてみたが、私の知る範囲では、これらの提示した作図法が示されることはなかった。AIがこの作図法の必要性を感じなかったのか、それともAIの想像の域を超えていた作図法だったのかはわからない。しかし、AIに頼らず、自らの思考をもとに研究をしていく意気込みがなければ、数学者(数学教師を含む)は、AIにその立場を奪われてしまう。今後も、AIにはできない生徒への仕掛けの模索と数学教育の発展につながる研究を続けていく決意を示し、提案を閉じることとする。

【引用文献】

* 1 高等学校学習指導要領数学科編昭和31年度改訂版の作成過程とその後：戦後の高等学校数学科の教育課程の確立 出版者：静岡大学 作成者：長崎栄三 公開日：2013-07-08

* 文部科学省 中学校学習指導要領(平成29年告示)解説数学編

(練馬区立開進第三中学校 副校長)

原問題から新たな問題を生成し、解決する作図の授業

ふるや そういち
古屋 壮一

1. はじめに

平成 29 年度全国学力学習状況調査 A④(1) で出題された、角の二等分線の作図の根拠となる対称な図形を見出す問題の正答率は 68.0% であった。これまでの全国学力学習状況調査の作図についての設問を分析したところ、作図の手順を問われる問題では正答率は 80% 以上だが、作図の根拠を問われる問題では 50 ~ 60% と、やはり課題の残る結果となっている。これまで、基本の作図の授業では、作図法の解析の場面において図形の対称性に着目することで見通しをもたせ、作図するように指導している。それにもかかわらず課題が残る結果となっているのは、その後の作図指導において、技能を定着させるための反復練習や定着した技能を活用するだけの問題演習に重きを置いているからではないだろうか。そこで、作図の授業、特に作図法の解析の場面において、「かけたとしたらどんな図になるだろうか」や「前回の解決方法と同じ考え方が使えそうだ」といった、生徒の中の自問自答、すなわち「内なる教師のささやき」が生じ、見通しをもって課題を解決していけるような授業ができないかと考えた。

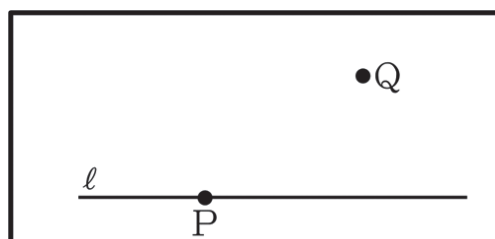
2. 研究内容

本研究では、「2 点を通り直線に接する円の作図」(図 1) を原問題とし、生徒が原問題から新たな問題を生成し、解決する作図の授業を以下の要領で実践し、生徒の反応を元に評価・改善を行った。

① 原問題から新たな問題を生成し解決する作図の授業を実践する。

② ①の授業における生徒の反応から表出した課題を元に指導案を検討・改善し、再度授業を実践する。

なお、原問題は前時で扱う内容とし、実践した授業では、前時の復習としてイントロダクション的に扱うこととした。



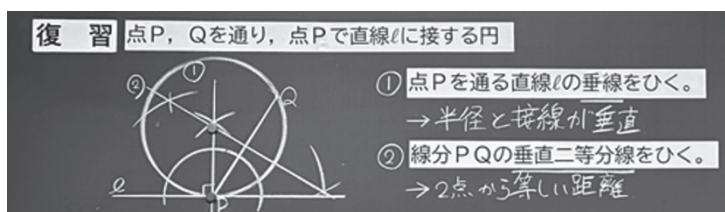
(図 1 原問題)

3. 授業実践 I

(1) 前時の復習

前時の復習として、原問題の解決に有効だった手だてや性質を取り上げ、全体で共有する。作図の手順として、点 P を通る直線 l の垂線をひくこと、線分 PQ の垂直二等分線をひくことが円の中心と半径を決めるために必要であることを生徒が理解していることが本時の課題解決

の肝となるため、復習ではあるが丁寧に扱っておく必要がある（図2）。



（図2 復習の板書内容）

(2) 問題①の生成と解決

原問題を元に、原問題の点Pの位置を動かすことで、生徒の自由な発想を生かしながら新たな問題を生成する。新たな問題を生成する際、生徒とは以下のようなやり取りがあった。

T 「点Pを動かして新しい問題を作るなら、どこに動かしますか。」

S1 「直線 l 上の別の場所に動かしてみよう。」

S2 「それだったら、同じ問題になるのではないかな。」

S1 「点Qの真下に来るように動かしたらどうだろう。」



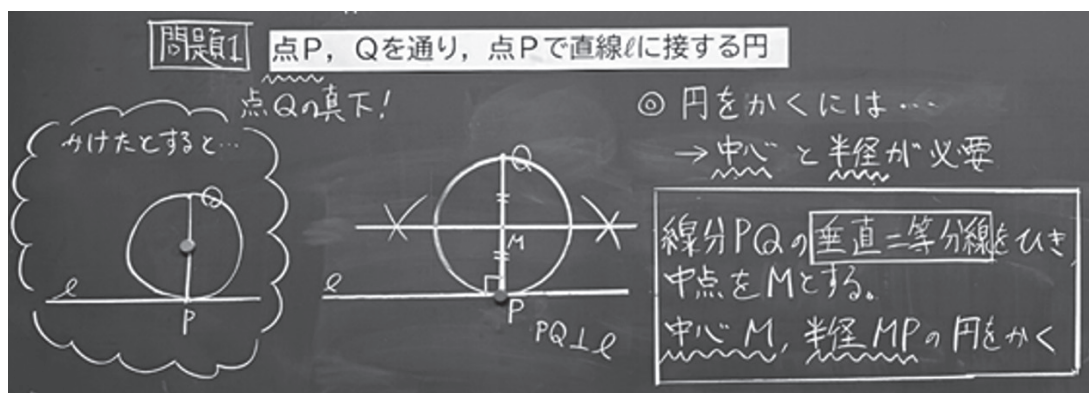
（図3 問題①）

これらのやり取りを元に、問題①を生成した（図3）。生徒とのやり取りから生まれた問題であるため、生徒は自然に、かつ意欲的に課題解決へと向かっていた。

本実践においては、作図法の解析の場面において、「かけたとしたらどんな円になるだろう」を大切にしたい。フリーハンドではあるが、より具体的に完成イメージをもてるようにするために方眼の入ったワークシート（図4）を配布した。多くの生徒が方眼を有効に活用することで、完成イメージをもとに課題の解決に向かうことができていた。原問題の解決方法を振り返り問題①の解決につなげ、作図の根拠について述べる生徒もあり、ほとんどの生徒が問題①の作図を行うことができていた（図5）。



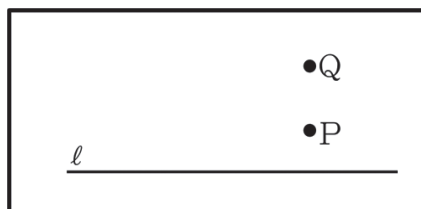
（図4 ワークシート）



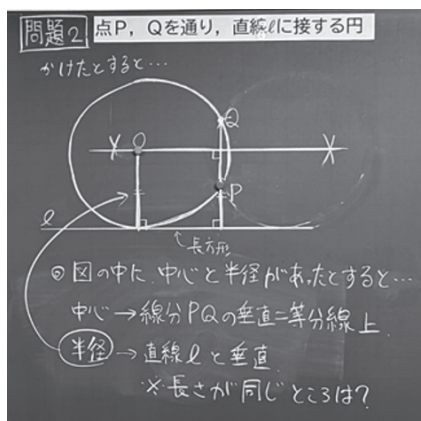
（図5 問題①の板書）

(3) 問題②の生成と解決

問題①の解決後に、次に点 P を動かして問題を作るとしたらどこにするかを問うたところ、生徒からは、直線 l を離れて、ちょっと点 Q に近づいたところという意見が出たので、それを問題②（図 6）として扱うこととした。問題①の解決と同様、生徒は「かけたとしたらどんな円になるだろう」を自然とイメージしていた。その中で、作図できる円が 2 つあることに気づいた生徒の発言から、まずは点 P, Q の左側にかける円に着目し、解決に向かうこととした。生徒は、円を作図するために必要な円の中心がどこか、半径の長さはどうなるかを考えようとしていたが、問題②の難易度が高いことに加え、原問題や問題①の解決を振り返るだけでは解決には至ることができず、多くの生徒は解決できずに本時を終えることとなった。（図 7）



（図 6 問題②）



（図 7 問題②の板書）

4. 授業実践Ⅱ

授業実践Ⅰの実践では、課題の難易度が高く課題解決までに至らない生徒がほとんどであったこと、生成された問題と原問題のつながりを意識づけることができなかったため生徒にとって細切れ感の強い学習となってしまったことの 2 つが反省点として浮き彫りとなった。これらの改善をしていく中で、原問題の解決とのつながりをより意識できるようにするため、問題①の解決後に問題③（図 8）を扱うこととした。生徒に自由に問題を生成させたところ、問題③を作っている生徒が多くいたことも、問題として取り上げる要因の 1 つであった。

授業の流れは授業実践Ⅰと変えずに行った。本実践で大切にしてきた作図法の解析の場面において、特筆すべきこととして、円ではない作図イメージ（図 9）をした生徒と、以下のようなやり取りがあった。

T 「これは、どのように考えたのですか。」

S1 「2つの点 P, Q を通り、直線 l と接するようにかきました。でも、これは円なのかな。」

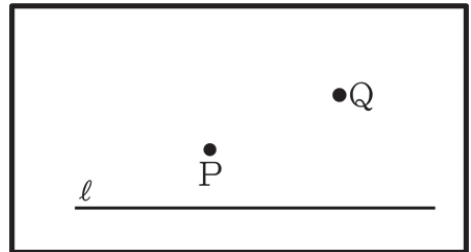


（図 9 生徒のイメージ）

この生徒は、問題①と同様に線分 PQ を直径としなければならないと考えていたようだが、違和感の残る作図イメージであることがわかる。他にも同じような作図のイメージをもっていた生徒が一定数いたことから、生徒同士で、「円」とはどのようなものか、そして作図すべき円はどんな円になるかを確認する場を設定した。

5. 2つの授業実践を終えて

2つの授業実践を通して、いくつかの成果と課題が表出した。まず、生徒が自ら問題を生成し解決する中で、大変意欲的に活動し、問題を生成する場面でも積極的に意見を発表したり、「かけたとしたらどんな円になるか」を意識しながら取り組んだりしていた。すべての生徒が主体的に学習に向かい、粘り強く学ぼうとする姿を見ることができた。しかし、共通の課題と



(図 10 問題④)

して、生徒が生成した問題のうち、扱えなかった問題があったこと、授業時間内に扱える問題に限度があることがあげられる。特に、実践した学年の学習内容では解決できない問題④(図 10)については、慎重に扱う必要がある。これらの課題を改善するために、扱う問題を精選することや、前時との接続を円滑にするために家庭学習の課題を工夫すること、本実践ではほとんど使われていなかった ICT を効果的に活用する方法を模索することが考えられる。また、原問題の解決と生成した問題を解決する方法をつなげられなかったことも共通の課題である。これを改善するためには、問題提示を工夫することや、生徒からいろんな問題が生成されるが、あらかじめどの問題を扱うかねらいを絞っておくことが考えられる。これらの課題点をふまえ、この授業をよりよいものにしていくために、めざす授業像を次のように捉え、今後の実践につなげていきたい。

- ・生徒が自然発生的に、「かけたとしたら～」 「円の中心は～」を考え始める
→作図指導の序盤から、「内なる教師のささやき」を育む声かけを行う
- ・生徒が「自分たちで問題を生成し、それを解決している」ことを強く意識できる
→生徒が問題を生成し、生徒が選択して解決していく授業展開にする
- ・生成した問題でのつまずきと原問題の解決を行き来しながら考えることができる
→解決方法を行き来できるような問題の順番を確立する

生成された問題でのつまずきを解消するために、原問題の解決と行き来しながら、「内なる教師のささやき」が自然発生的に生じ、粘り強く課題解決に向かうことができる授業をめざしていきたい。

(山口県山口市立平川中学校)

Studyaid^{D.B.} 徹底活用術

～ Studyaid D.B. オンライン ブラウザ版 最新情報をお届け～

Studyaid D.B. オンライン（※）は皆さまからのご意見・ご要望を取り入れながら、日々進化し続けています！

今号では、特におすすめの新機能についてご紹介いたします。

※ Studyaid D.B. オンラインについて詳しくは <https://www.chart.co.jp/stdb/online/> をご覧ください。

ルビ機能がついに登場！

ルビ機能はブラウザ版に追加されたばかりのイチ押し機能です！課題に取り組みやすくするためプリントにルビを振りたい、とのご要望を多くの先生方からいただいております。

大変お待たせいたしました。ついにこのたび、ブラウザ版で実現しました！

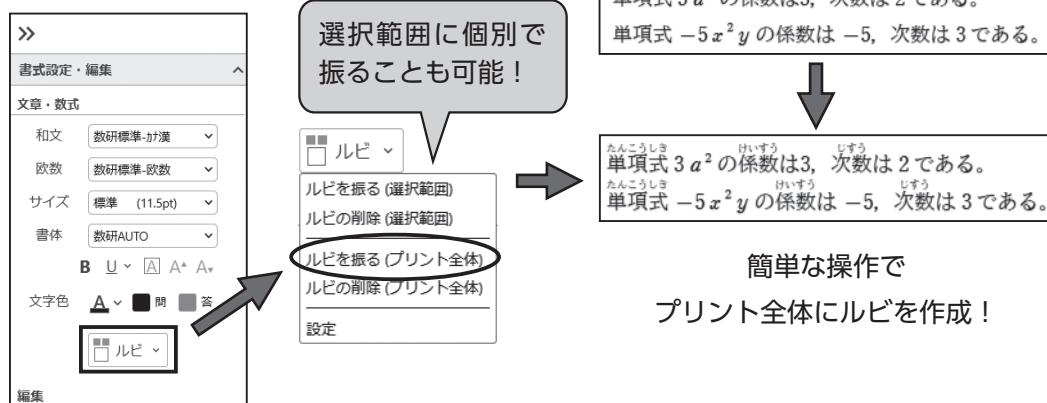
◆ プリント全体に対して、自動でルビ振りが可能！

ルビは、右サイドメニューの「ルビ」から作成できます。

「ルビを振る（プリント全体）」を利用すると、プリント全体に自動でルビを振ることができます。

データベースから検索した問題と自作した問題のどちらにも対応しています！

【右サイドメニュー】

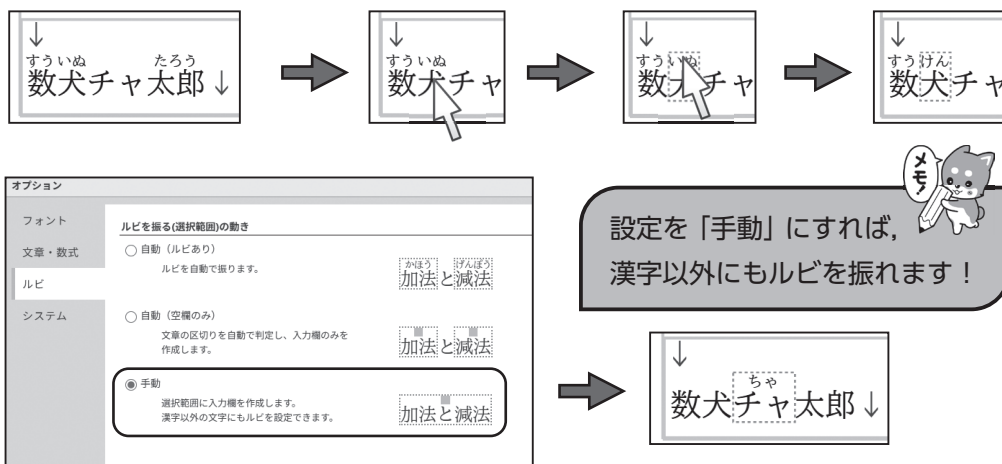


◆ 一度振ったルビの編集が可能！

複数の読み方がある漢字など、ルビが意図した通りに作成されない場合があります。そのようなときは、次ページのように個別に編集できます。

(次ページへ)

(前ページから)



文章や数式の編集機能を追加！

ブラウザ版に文章・数式の編集機能を追加し、検索・レイアウトした問題の編集や、問題の新規作成ができるようになりました。

ブラウザ版でも自由に文章や数式を入力して、日頃のプリント作成にお役立てください！

数式のアイコンが一覧で表示されているので、直感的に選びやすい！

数式編集機能の使い方

- ① 左サイドメニューの「文章・数式」タブから、使いたい数式のアイコンを選択します。
- ② 選択した数式が問題編集領域のカーソルの位置に挿入されます。
- ③ 値を入力します。

実用 PrinT 例集を収録！

ブラウザ版でも実用 PrinT 例集が利用できるようになりました。プリントで扱いたい単元やテーマに合わせてぜひご活用ください！

実用 PrinT 例集とは…

単元やテーマごとに、データベースの問題を数問ずつレイアウトしているプリント集です。中学数学シリーズには、商品に搭載された問題データを使った単元テストやワークシートをプリントデータとして収録しています。

※お使いの商品によって、実用 PrinT の収録内容は異なります。

※ ブラウザ版の実用 PrinT 例集は、『これからの数学』指導書付属 Studyaid D.B. をはじめとし、順次利用可能な商品を追加しています。

単元テスト 正の数と負の数

() 題 () 番 名 姓 ()

① 自然数、負の数の意味を理解できていますか
次の数の中から、自然数をすべて選びましょう。
-3, $+\frac{5}{7}$, -2.7, +6, $-\frac{8}{3}$, 7, 0, +0.3

+

② 数の大小関係や絶対値の意味を理解できていますか
次の問いに答えましょう。
(1) 数直線上で、-2からの距離が3である数をすべて答えましょう。
(2) 絶対値が3より小さい整数をすべて答えましょう。

+

③ 正の数と負の数の加法と減法の計算はできますか
次の問いに答えましょう。
(1) $(-30)+(-17)$ (2) $(-30)-(+17)$
(3) $8-(-2.6)$ (4) $(+\frac{3}{7})-(+\frac{5}{7})$

+

④ 正の数と負の数の加法と減法の計算はできますか
次の問いに答えましょう。
(1) $(-5)+(+3)+(-4)$ (2) $-10-(-2)+(-10)+5$

+

⑤ 正の数と負の数の加法と減法の計算はできますか
次の問いに答えましょう。
(1) -3^2 (2) $(-1)^2$ (3) $(-\frac{3}{4})^2$

+

⑥ 正の数と負の数の乗法の計算はできますか
次の問いに答えましょう。
(1) $\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{7}{8}$

+

⑦ 正の数と負の数の数の意味を理解できて
次の数の逆数を求めましょう。
(1) $\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{7}{8}$

各種エディタ機能で
変更も可能！

【知識・技能】

【思考・判断・表現】

単元テスト 正の数と負の数 解答用紙

① 【知識・技能】 3点×4=12点
(1) (2) (3) (4)

② 【思考・判断・表現】 3点×3=9点
(1) (2) (3)

③ 【知識・技能】 3点×4=12点
(1) (2) (3) (4)

④ 【知識・技能】 3点
(1) (2) (3) (4)

⑤ 【知識・技能】 3点×3=9点
(1) (2) (3)

⑥ 【知識・技能】 3点×4=12点
(1) (2) (3) (4)

⑦ 【知識・技能】 3点×3=9点
(1) (2) (3)

⑧ 【知識・技能】 3点×3=9点
(1) (2) (3)

計 算 式 名 前 合 計
点 点 点
/10点 /30点

単元テストでは、大問ごとに
「知識・技能」「思考・判断・表現」の
観点が示され、評価にも利用しやす
くなっています。

以降も、ブラウザ版独自のものを含めた機能を順次追加し、レイアウト・編集・印刷すべてをブラウザ上で完結できるように、アップデートしていきます。

ブラウザ版の今後の進化にぜひご期待ください！

ブラウザ版の最新情報については、弊社ホームページでもご紹介しています。

https://www.chart.co.jp/stdb/online/function/browser_renewal.html



Studyaid D.B. に関する「よくある質問とその回答」も公開中！

<https://support.chart.co.jp/hc/ja/categories/15072025967769>

