

数学教師の指導の引き出しに入れておきたい「垂線・平行線の新たな作図法」と授業におけるその活用の提案

しむら おさむ
志村 修

1. はじめに

中学校の図形（幾何）の学習は、学習する図形に関する定義や性質を積み重ねたり、関連付けたりして進められてきた。その過程の中で、その定理の知識やそれを使いこなす技能を深めていく授業、そしてその定理を活用して課題の解決を図る授業等を行いながら、各定理の良さを認識できるよう指導を行っている。

昭和 20 年代・30 年代の学習指導要領の創成期においては、「幾何はひとつの古典として、学問のまとめ方の手本である」＊1：昭和 28 年 10 月 9 日教材等調査研究会数学小委員会記録 という解釈もあり、昭和から平成前期に至っては、幾何の各単元を系統立てて、効率よく、知識・技能を深めていく授業展開に重きが置かれていたと考える。されど、現行の学習指導要領においては、「主体的・対話的で深い学び」が学び方（授業展開）の要になっている。授業をそのように捉えたならば、指導者自身が主体的・対話的で深い学びにつなげる「仕掛け」を絶えず研究していかなければならない。以下に、仕掛けとして活用できる話題・題材を「垂線と平行線の作図」をもとに示していく。

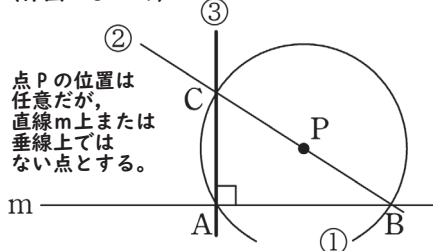
2. 垂線の新しい作図法

様々な教材研究や授業デザインの研究を通して、中学校数学の図形指導では不変ともいえる「垂線の作図法」において、従来の方法とは異なる作図法を見出した。それを提示する。

【直線 m 上の点 A を通る垂線の作図】

- ① 任意の点 P を中心として PA を半径とする円を描く。ただし、点 P は、直線 m 上およびこれから作図をする垂線上にあってはならない。
- ② 描いた円が直線 m と交わる 2 つの点のうち、 A とは異なる点を B とする。点 B と円の中心である点 P を通る直線 BP を引く。
- ③ 直線 BP と円が交わる点を C とすれば、直線 AC が垂線となる。

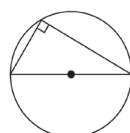
〈作図のまとめ〉



作図の数学的根拠は、見ての通り、対称性でもなく三角形の合同でもない。すなわち、中学 1, 2 年生が直観的に理解できる作図法ではない。この数学的根拠は、中学 3 年の円周角の単元で学習する「半円の弧に対する円周角」である。俗にいうタレスの定理である。

【タレスの定理】

円周上の2つの点を結ぶ線分が円の中心を含むならば、その2点と円周上の別の点とを結ぶ2つの線分のなす角（円周角）は、必ず直角となる。



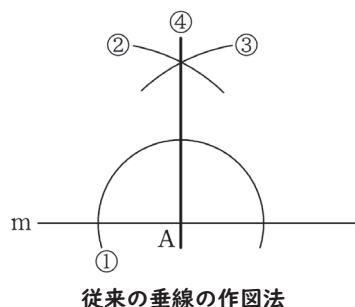
3. 従来の作図法との比較、および垂線の新しい作図法に期待すること

垂線の作図については、戦後の教科書の記述に大きな変化はない。右図の通りである。

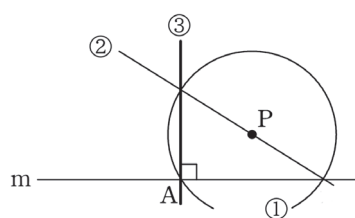
義務教育年齢の生徒にとって、この作図は直観的な理解が容易にでき、かつ三角形の合同などの内容と照らし合わせて、数学的根拠も明確にできる大変優れた作図法である。

コンパスを用いて円や弧を描く、定規を用いて直線を引くといった操作の回数を「操作回数」と定義したとき、今回提示した「垂線の新しい作図法」の操作回数は3回である。この3回は最少回数である。

「操作の最少回数を追求する」という視点で垂線の作図を研究することは意味のあることである。しかし、生徒にとっては、研究する動機付けにはなりにくい。やはり、身近な課題の解決に引用できることを考えさせたり、活用性や利便性の点に触れたりすることで、「この古典（幾何）が学問のまとめで終わる」ことなく、深い学びへつなげられると考える。



従来の垂線の作図法



垂線の新しい作図法

4. 主体的な学び・対話的な学び・深い学びへの扉を開く可能性について

ここで、図形学習の集大成として、新たな学びへの展開例を2つ紹介する。

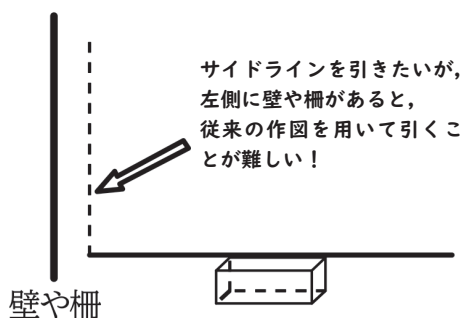
(1) 身近な課題の解決を図る協働的学びへの活用

例えば学校では、校庭でサッカーのコートを整えることがある。しかし、右の図のように、壁や柵が障害となる場合が多々ある。この場合、従来の作図法のコンパスは使用できない。

「コンパスの代用として、ロープを活用できる。」という意見は、生徒からももちろん出てくる。されど、障害となる壁や柵に対しての課題は解決できず、思考を深めるモヤモヤ（葛藤）が生み出される。ここで「協働的学び」を仕掛け、生徒同士による解決を促したい。

一般的には、長方形を作ったり、ピタゴラス数（3：4：5等）を用いて直角を作るといった解決策が、「納得解」になるであろうと推測できる。

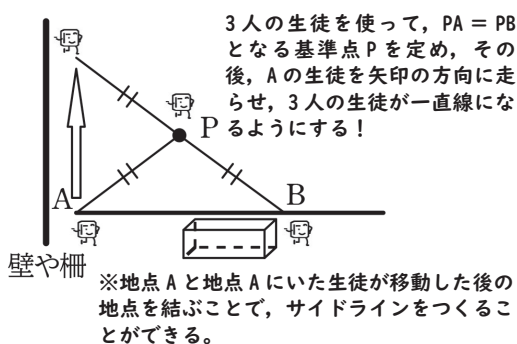
しかし、教師の方でこの「新しい作図法」を理解していたならば、生徒への仕掛け・働きかけは、「深い学び」へとつなげられると考える。



さて、筆者の結論は、右図である。見ての通り、壁や柵の影響を受けることもほぼなく、地面に円を描くことなく、人の移動でサイドライン（直角）をつくることができる。

これは一つの例であるが、その後の部活動や球技大会等で、学習内容を実生活に活用させることができ、生徒にも新しい作図法の良さを伝えることができる。また、同時に、円周角の定理（タレスの定理）を再確認させることもできる。

なお、新しい作図法を活用させる課題は、右図（『これからの数学1』5章探究コンテンツ）の(2)のような、具体場面を想定しない数学の問題として提示することもできる。



課題

次のような線を作図し、その方法を説明しましょう。

ただし、作図の途中の線もふくめて、すべて課題の枠からはみ出さないようにして作図する必要があるものとします。

(1) 線分ABの垂直二等分線 (2) 点Dを通る線分CDの垂線

(2) 今までの価値観を見直し、新しい知識につなげる思考へ

この垂線の作図法だけでも普遍的な価値観を見直す契機にすることができる。されど、学んだことに対して、自らが統合的・発展的考察をすることで、「新しい知識につなげることができる可能性」を、この教材を通して生徒に語りたい。

【平行線の作図への発展】

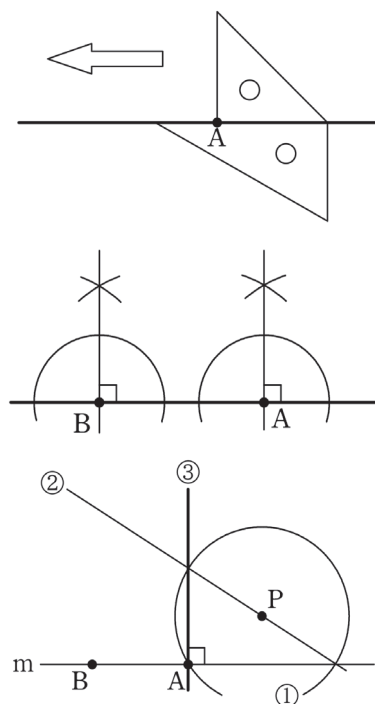
この作図法は、平行線の作図に対しても活用できる。右図は一般的な2枚の三角定規を用いた平行線の引き方であり、生徒も直観的に理解ができる。従来の授業では、この直観的理解をもとに平行線の作図の理解へと進む。

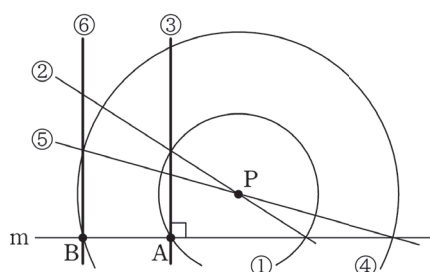
右上の三角定規を滑らせて2本の平行線を引くことは、右のように定規とコンパスで、直線に対する垂線を2本作図することで解決できること、さらに、このことから、中学2年で学習する同位角の定理（公理・公準）につながっていくことは周知の通りである。

一方で、「垂線の新しい作図法」を学んだならば、従来とは違う平行線の作図法が構築できる。それは、コンパスと定規による作図であるにもかかわらず、効率よく平行線を描くことができるものである。その作図を、「直線m上の2点A、Bを通る平行線の作図」を例に紹介する。

まずは「垂線の新しい作図法」で、点Aを通る直線mに対する垂線を作図する。（右図）

続いて、点Pを中心とする同心円を、点Bを通るように描く。点Aからの垂線の作図と





同様に、左図に示す手順で垂線を作図する。

これによって平行線が作図できる。

操作回数は6回で、垂線2本による作図の操作回数(8回)より少ない。しかし、回数よりも「同心円の作図」となることが、効率化につながっていると考える。

5. まとめ

今回の作図法の基盤となっているタレスの定理は、中学校の教科書では、確実に取り上げられる図形(幾何)の定理である。しかし、今回紹介した作図法は、教科書では取り上げられなかったことがない。それは教科書が「学問を系統的に練り上げ、まとめた傑作」だからと考える。この作図法は「練り上げ、まとめられたもの」ではない。次の記述にあるような活動を通して生み出されたものである。

数学が歴史的に発展しているのは、一旦解決された問題やその解決過程を振り返り、問題の条件や仮定を見直したり、共通する性質を見いだしたり、概念を一般化したり拡張したりする活動を数学者たちが続けているからである。したがって、数学の事象についての問題解決の指導に当たっては、振り返ることによる新たな問題の発見を生徒に促すことが大切である。 *文部科学省 中学校学習指導要領(平成29年告示)解説数学編 27 ページより抜粋

指導計画においては、通常の授業における各領域の内容に関する問題解決的な学習を継続し、各領域で学習した内容を総合したり日常の事象や他教科等での学習に関連付けたりするなどして見いだした問題を解決する学習として課題学習を位置付け、各領域の学習が一層深まりをもつように配慮することが大切である。

このような課題学習の指導は、教師にとって数学的活動の本質の理解を促し、教材研究や指導法の改善、カリキュラム・マネジメントの必要性を理解する上でよい機会になる(後略) *文部科学省 中学校学習指導要領(平成29年告示)解説数学編 175 ページより抜粋

実際に、垂線や平行線の作図を、生成AIでどのように示されるかためしてみたが、私の知る範囲では、これらの提示した作図法が示されることはなかった。AIがこの作図法の必要性を感じなかったのか、それともAIの想像の域を超えていた作図法だったのかはわからない。しかし、AIに頼らず、自らの思考をもとに研究をしていく意気込みがなければ、数学者(数学教師を含む)は、AIにその立場を奪われてしまう。今後も、AIにはできない生徒への仕掛けの模索と数学教育の発展につながる研究を続けていく決意を示し、提案を閉じることとする。

【引用文献】

* 1 高等学校学習指導要領数学科編昭和31年度改訂版の作成過程とその後：戦後の高等学校数学科の教育課程の確立 出版者：静岡大学 作成者：長崎栄三 公開日：2013-07-08

* 文部科学省 中学校学習指導要領(平成29年告示)解説数学編

(練馬区立開進第三中学校 副校長)