

# 図形領域における証明指導のヒント

はかまた りょうと  
袴田 綾斗

今回は「図形領域における証明」というテーマで、数学教育の研究や実践を通して得られた知見を盛り込んで、いくつかのトピックについてお話していきます。

## 1. 予想する活動の重要性——認知的統一性

「数学の授業では予想を立てさせることが大切だ」というのは、すでによく知られていることだと思います。あるいは経験知として実感されている方もいるでしょう。しかし多くの場合その大切さは、生徒を主体的に学習活動に臨ませるための手立てとして「大切だ」と捉えられていると思われます。また、教師が証明すべき図形の性質を提示するのではなく、生徒が自ら予想することが大切なのだ、という考えもあるでしょう。一方、「証明を生徒に考えさせたり書かせたりするためには、そもそも予想するという活動が重要なのだ」という指摘はあまり聞きません。ここで紹介したいのは、この指摘につながる研究です。

イタリアの研究者グループが提唱した概念に「認知的統一性 (cognitive unity)」があります (Garuti, Boero, & Lemut, 1998)。これは、証明をつくる前の、例をつくったり、パターンを探したり、一般化できるか検討して予想を立てたりする探索活動の重要性を指摘したものです。なぜ探索活動が重要かという、それが証明のアイデアにつながるからです。与えられた問題場面において様々な例やパターンを探索する際に試したことが、いざ証明をつくる段階になったときに、「何がいえるか」「何をいえばよいか」を考えるヒントになります。そして、それらのアイデアを適切につないでいくことで、証明を書くことができるようになります。

例えば、次のような問題を考えてみましょう：

△ABC と △ECD はどちらも正三角形で、点Cを共有しています。このとき、線分ADとBEの長さについて、何がいえるだろうか。

よくある問題ですが、「 $AD = BE$ であることを証明しなさい」のように、証明すべき結論を示さず「何がいえるだろうか」としているところがミソです。このような問いを提示することによって、生徒は条件を満たす様々な例をつくって「いえること」を探すでしょう。図形を描画して動かすことができるアプリケーションを用いれば、生徒一人ひとりがパターンを探索することができます。すると、このような探索の中で「長さや角度が変化する中でも変わらないこと」に注意が向きやすくなります。そして、証明のキーアイデアになる  $\triangle ACD \equiv \triangle BCE$  という関係にも気づきやすくなります。こういった探索を通して  $AD = BE$  を予想することで、証明をつくる段階では「何をいえばよいか」を考えることの足場になり、結果として、生徒自身が証明を考え、書くことができるようになると期待できます。

一見すると、「 $AD = BE$ であることを証明しなさい」と証明すべき事柄が問題文で提示されていたり、「右の図の $\triangle ABC$ と $\triangle BCE$ において」と特定の図が与えられていたりした方が、生徒にとっては取り組みやすそうです。しかしながら、証明すべき事柄がすでに提示された状況では、探索の余地がほとんどなく、上で見たような証明のアイデアに気づく契機も失われかねません。結局、示すべき結論はわかっているが、そのために何をすればよいのかわからず手が動かない、ということにつながってしまいます。問題場面を探索させ、生徒自身に予想を立てさせることは、証明をつくることにとって重要なのです。

このトピックの最後に、授業に探索活動を取り入れるためのヒントをお伝えします。それは、すでに上で書いたように問題を「何がいえるか」とオープンな問いの形で提示することです。設定された条件のもとで常に正しいといえる事柄を探すことは、仮定を意識しながら結論を探索することと言い換えられます。生徒がある発見をしたとき、他の生徒と共有することで、「それは本当に仮定を満たしているか」「その結論は常に正しいといえるか」という議論も生まれ、論理的に考えることにもつながるでしょう。オープンな問いの形にすることは小手先のテクニックにも見えますが、数学的な考え方を働かせるための手立てにも、そして、証明に関する認知的統一性を高める工夫にもなるという、理論的な裏付けのある指導の方法といえるのです。

## 2. 何をどう書いたら証明になるの？——証明の書き方の社会性・文化性

次のトピックは証明の書き方・表現方法に関するものです。まず、学習指導要領の解説にある指導上の留意点を見てみましょう。

第2学年における証明の指導では、必要以上に証明の書き方に拘ることをせず、証明を読むことを通じて証明の根拠の用い方を明らかにしつつ、表現に一定の幅をもたせ、生徒が自分なりに工夫して証明し、よりよいものへと互いに高めていくことが大切である。(文部科学省, 2018, p. 47)

証明の書き方に必要以上に拘らなくてよいという指針は、生徒の主体性を活かした授業展開を後押ししてくれる心強いメッセージです。しかし同時に、私には「高いレベルのことが要求されているな」とも感じられます。どこからが「必要以上」の拘りなのか、どこまでが「一定の幅」に収まるズレなのか、といったことには明確な境界線がなく、場面ごとに教師が判断する必要があるからです。

このように書くと、学習指導要領の解説が「この程度の表現の省略は可とする」や「この順序での記述は許容範囲外である」などのような、あるべき証明の姿の提示を怠っているかのよう受け取られてしまうかもしれません。しかし、そのようなことはまったくありません。そもそも学習指導要領やその解説には、詳しく書くほど現場の裁量を小さくしてしまうというトレード・オフの関係があります。もし「これは可」「これは否」という事例を詳細に示してしまうと、今度はそれが教師にとっての拘りの種になってしまうことが懸念されるのです。

しかしながら、証明の許容範囲を明示できないことについては、このような学習指導要領の性格に加えて、より本質的な要因を指摘することができます。それは、そもそも「何をどのよ

うに書いたものが証明と呼ばれるのか」をあらかじめ明確に定めておくことはできないというものです。証明の書き方の適切さは、数学的に決定できるものではありません。フランスのニコラ・バラシェフ氏によれば、証明は当該のコミュニティに受け入れられた推論過程と規定することができます (Balachef, 2024)。つまり、証明はそれを受け取るコミュニティ——それは他の生徒や教師だったり数学者集団だったり様々です——が OK と判断すれば証明とみなされ、NO と判断すればダメなわけです。もちろん、受け入れる側のコミュニティは、好き勝手な基準で判断をするわけではありません。そのコミュニティで共有されている（とみなされている）規範に基づいて可否を判断します。このように、証明の書き方の適切さには、社会的あるいは文化的といえるような側面があるのです。

例えば、アメリカの高校数学では「二列証明 (two-column proof)」という証明の書き方が指導されることがあります。△ ABC において「 $AB = AC$  ならば  $\angle B = \angle C$ 」であることの証明を例としてあげると、次のように書かれるのが一般的です。

| 言明 (Statements)                         | 理由 (Reasons)         |
|-----------------------------------------|----------------------|
| 1. $AB = AC$                            | 1. 仮定                |
| 2. $\angle A$ の二等分線と $BC$ との交点を $D$ とする | 2. すべての角は二等分線をもつ     |
| 3. $\angle BAD = \angle CAD$            | 3. 角の二等分線の定義         |
| 4. $AD = AD$                            | 4. 反射律               |
| 5. $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ | 5. SAS 合同条件 (二辺夾角相当) |
| 6. $\angle B = \angle C$                | 6. 対応する角の相当性         |

もし、日本の中学生がこのような形式の証明を書いてきたら、担当の教師はどんな反応をするのでしょうか。減点とまではいかずともびっくりするでしょう。「正しいといえば正しいけど、“普通に” 書くようにしようね」と書き方の変更を促すかもしれません。日本の中学校数学の慣習からすると、二列証明の書き方はやや適切さに欠けるもの、少なくともより適切な（普通の）書き方があるものとしてみなされると考えられます。

さて、このような証明の書き方に関する社会性・文化性を前提とすると、証明学習の初期の困難性について、少し解像度を上げて見るできるようになります。証明を学び始めるとき、どのような書き方をすればよいのか、コミュニティへの入門段階にいる生徒にはわかりません。したがって、そのコミュニティの「熟達者」である教師が書き方を指導することになります。しかし、ここで難しいのは、なぜその書き方がよいのか、なぜ他の書き方ではよくないのか、それが「新参者」である生徒にはわからないことです。教師が説明しようにも、「日本の中学校数学でこれまでに培われてきた証明の規範にしたがうと、こういう書き方が適切だと認められるのだ」のように、説明になっていない説明をすることになってしまいます。確かに、「これなら多くの人を納得させられそうでしょ」と、正当化や説得に適した表現方法として証明の合理性を説明することはできます。しかしやはり、「この文言は省略してはダメ」など、慣例が形作っている規範については、最終的な合理化は困難です。

この困難性は証明の社会性・文化性という本質的特徴に根ざしているものであり、個々の教師の工夫によって解消できるものではありません。しかしそれでも、というよりもそれだからこそ、教師はこのような指導上の難しさがあることを意識しておく必要があると私は考えます。教える側に立つ教師も、これまでに積み重ねられてきた慣習から完全に自由であるわけではありません。証明の書き方のスタイルについて、自由に選べる中から最も合理的なものが選択されたと捉えてしまうと、生徒に対して「この書き方こそが正しいのだ」と無理を通すことにつながります。一方、当然ながら証明の書き方は「何でもあり」なわけではありません。証明の社会的・文化的側面を認識しておくことは、「唯一絶対の正しさ」と「何でもあり」の間のバランスをとって指導に臨むためにも重要だと考えます。

### 3. 教材研究を深めるには？——数学教育の歴史を参考にする

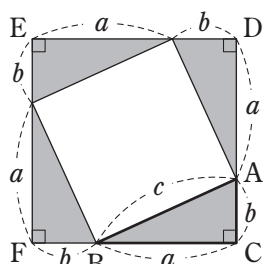
教材研究の文脈で「当たり前とみなしてきた教科書の内容も、別の可能性を探ってみるとより理解が深まる」のようなことを耳にすることがあります。確かにその通りだと思いますが、これは言うは易く行うは難しで、別の可能性を探るためには一定程度の背景知識が必要でもあります。では、どのような知識が役立つでしょうか。最後のトピックとして「数学教育史の知識が教材研究に役立つ」ということをお話ししたいと思います。

以下では、三平方の定理を例にして、幾何教育の歴史からその教材研究を深めて見たいと思います。まず、三平方の定理の証明を見てみましょう。現在の多くの教科書では、下の図のように合同な直角三角形を用いて大きな正方形をつくり、内側の正方形の面積を二通りの仕方で表すことで証明を行います。

$(a+b)^2 - 4 \times \frac{1}{2}ab = c^2$

整理すると  $a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = c^2$

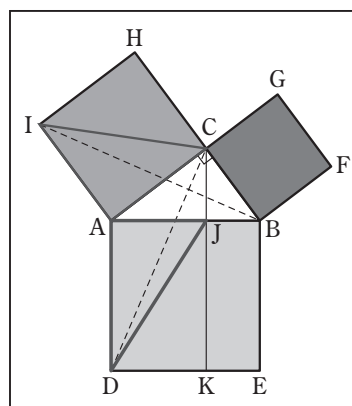
すなわち  $a^2 + b^2 = c^2$



幾何教育の歴史の観点からこの証明方法の別の可能性を探ってみます。今回参照するのは明治期の数学教育です。当時、幾何教育の基礎を築いた人物に菊池大麓という数学者がいました。菊池は教授要目、今でいうところの学習指導要領の作成に文部大臣として大きな影響を与えました。この教授要目には「分科主義」という考え方が反映されています。分科主義とは幾何や代数等を個別の学科として独立に扱うことを是とする考え方で、これに基づいて、幾何の問題解決に代数的な手法を持ち込むことは非とされていました。このころの中学校では、上のような三平方の定理の証明は代数的な表現と処理を用いているという点で禁じ手だったのです。

では、代数的ではない、つまり幾何的な方法の証明にはどのようなものがあるのでしょうか。

例えば、等積変形と合同（回転移動）を利用するものがあります。右の図でいえば、 $\triangle CIA = \triangle BIA \equiv \triangle DCA = \triangle DJA$  より、正方形 CHIA と長方形 ADKJ の面積が等しいことが示されます（正方形 CGFB と長方形 BEKJ についても同様）。なお、これは現在の教科書にも発展やコラムとして載っています。



さて、このような歴史があったことを踏まえると、現代の証明がもっぱら代数的な手法によって行われていることが際立ってきます。では、なぜ多くの教科書で代数的な証明が採用されているのでしょうか。考えつく理由を挙げてみると次のようなものがあります。

- 幾何的な証明は書くことが多く、代数的な証明は相対的に書くことが少ないから。実際、代数的な証明の式変形は3行分で済む。
- 幾何的な証明は等積変形や回転移動など動く図形をイメージする必要があるが、それを苦手とする生徒がいるから。
- この単位では三平方の定理を用いた辺（線分）の長さの求値に重きが置かれており、それとの連続性をもたせるためには代数的な証明の方が整合性が高いから。

このような理由があると考えると、確かにこの単位では代数的な証明の方が扱いやすく、理にかなっているように思われます。一方、三平方の定理が「正方形の面積」に関する定理であることに対して、上の幾何的な証明は「主張を直接示している」ということができます。また、ICT機器を利用すれば、動く図形のアニメーションを見せることも容易です。さらに「三平方の定理を証明できることを知る程度とし、生徒の興味・関心に応じて柔軟に取り扱う」（文部科学省、2018, p. 150）ことが重要ですから、幾何的な証明のすべてをきっちり書かせる必要はなく、視覚的に証明を納得できれば十分な場合もあります。

ここでの目的は代数的証明と幾何的証明のどちらがよいか結論づけることではなく、数学教育の歴史を参照することで現在の教育内容の理解が深まる、という教材研究をお見せすることでした。別の在り方を考えることで、代数的な証明の利点も改めて見えてきたのではないのでしょうか。今回のトピックが、これをご覧になった方の参考になれば幸いです。

## 文献

- Balacheff, N. (2024) Mathematical argumentation, a precursor concept of mathematical proof. In J. Wang (Ed.), Proceedings of ICME 14 (Vol. 2, pp. 33-52).
- Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22nd Conference of PME (Vol. 2, pp. 345-352).
- 文部科学省 (2018). 中学校学習指導要領解説数学編, 日本文教出版

(高知大学 講師)