

モデル化の解像度をあげることとしての中高数学の接続

さこた あや
迫田 彩

1. 事象のモデル化・数学化を授業で取り扱うときの難しさ

探究活動の充実や、日常の事象を数学化し問題解決する活動の充実が重視されています。ある事象を切り取って、そこから問いを抽出し、数学的な問題にして解決を図る一連の過程は、数学的モデリングといわれます。「算数・数学の学習過程のイメージ（文部科学省，2018，p.23）」を踏まえると、生徒が自立したモデラーとして問題解決できるようになることを目指して、授業で取り扱うことが大切となります。したがって、生徒自らが事象を切り取ることや、問いを抽出することを経験できる数学的活動を授業に取り入れていくのが望ましいと考えられます。

しかし、授業を構想する際に問題を設定していると、あるいは生徒の探究活動を眺めていると、しばしば、「問いとしては面白そうだが、既習の数学の範囲内では解決できない」といったような事態が発生します。これは、数学の事象あるいは日常の事象をモデル化し、数学化を経て数学的モデルと対応させた時に、必ずしも解決方法が学習者にとって既習のものとは限らないということに起因しています。加えて、学習者は、解決方法を実行してみるまで、どのような数学が出現するかが分からないという側面もあり、事象のモデル化や数学化から解決までの一連の過程を生徒に経験させようとすると、多くの場面で教師の介入が必要になります。

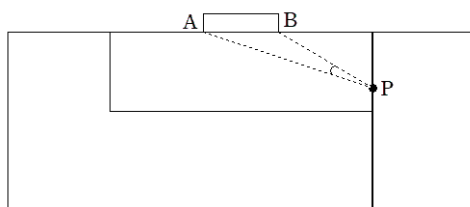
これを回避するには、数学的なモデルを固定した上で、学習者に提示する数学の事象あるいは日常の事象を調整したり、変数など条件の単純化・理想化などの調整をしたり、ある程度数学化した上で学習者に提示することが考えられます。

しかしながら、それでは数学的に解決した後もとの事象に戻したときに、単純化・理想化されすぎてしまうという新たな問題が発生します。これらのことから、学習者が自立したモデラーとして問題解決する成功経験をつんでいくには、中学・高校を通して、段階的に単純化や理想化の具合を調整していく必要があると考えます。

数学的モデリングの実践において、生徒がどのような数学を選択し使用するかは、それ以前の数学の実践経験に依拠している (de Almeida, 2018) ため、学習が進むにつれてモデル化する際の単純化や理想化の具合、すなわち複雑な事象を反映したモデル化の解像度を調整することができるのではないのでしょうか。そこで今回は、中学・高校の複数単元で実践可能な、同一の事象から段階的にモデル化の解像度をあげることができる教材を紹介します。

2. サッカーのシュート問題

「サッカーのシュートを決めるにはどのようにすればよいか？」という問いを例として考えていきます。相手との距離感, コントロール力など多くの要素が関わっていますが, まずは「どこからシュートを放つのがよいか？」という問いをたてたとしましょう。フィールドを長方形とし, ボールは一直線に飛んでいくとみなし, サッカーゴールの枠の幅は無視して考えます。次の図のように, サッカーゴールの端を点 A, 点 B, シュートを放つ位置を点 P とすると, $\angle APB$ が最大になるような点 P がこの問いの答えになります。



点 P が直線 ℓ 上を動くとし, そのとき $\angle APB$ が最大になるような点 P はどこかという問題にしていくと, これは 2 点 A, B を通る円を考え, 円周角の定理や三角形の外角の定理を用いることによって解決することができます (詳細は, 竹内・愛木, 2008)。

さて, これによってシュートを放つ位置については分かりましたが, その位置からどんな向きで, どんな角度で蹴り上げるとシュートを決めることができるのでしょうか。この問いに答えるには, 数学 I の三角比が役に立ちます。4STEP 数学 I + A には, 次のような問題が掲載されています (一部改変)。

A さんがグラウンドでサッカーの練習をしている。グラウンドを真上から見ると図 1 のようになり, 図の地点 P から, 無人のサッカーゴールに角度 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) でシュートを放つ。また, シュートを放つとき, ボールの飛んでいく方向と地面のなす角を β とする (図 2)。サッカーゴールの横幅は 7.5m, 高さは 2.5m とし, ボールは一直線に飛んでいくとみなす。またボールとサッカーゴールの枠の幅は無視し, ボールがサッカーゴールの枠に当たった場合はゴールしないとする。

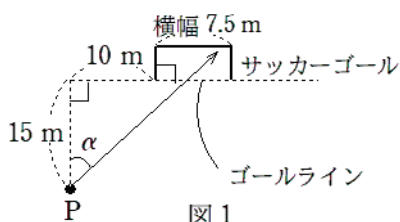


図 1

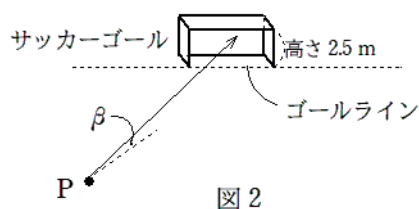


図 2

- (1) ゴールするとき, α の範囲を三角比の表を用いて求めよ。
- (2) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$ のときはゴールするか答えよ。

フィールド上で、シュート位置から最も近いコーナーを点 O 、ボールポストを X, Y とすると、 $\triangle POX$ と $\triangle POY$ は、 $\angle POX = \angle POY = 90^\circ$ の直角三角形となるので、 $\tan \alpha$ の範囲を考えることで、ゴールするときのタッチラインとの角度を絞ることができます。また、フィールドと垂直な平面を考えることで、サッカーゴールの高さと比較して、ゴールするときのボールの蹴り上げの角度を絞ることができます。このようにして、ある地点からどんな向きでシュートを狙えばよいかの基準を、三角比を用いて得ることができるのです。

以上より、「サッカーのシュートを決めるにはどのようにすればよいか？」という問いに対して、ある直線上における最適なシュート位置が、円を用いたモデルによって、また、ある位置において最適なシュートの向きが、三角比を用いたモデルによって、それぞれ数学的な問題として扱うことができることをみてきました。

ここまで、最適なシュートの位置を探る際に、シュートの位置を直線 l 上に制限して考えていきましたが、実際にシュートを放つシチュエーションを考慮すると、直線上しか動けないという条件は厳しそうです。さらに解像度をあげたモデルとして、例えば、コーナーキックからボールを受けてシュートを放つというようなシチュエーションにおける最適なシュート位置は、どこになるのでしょうか、という問いが考えられます。この問いについては、座標平面で考えると正接の加法定理と相加平均・相乗平均の関係を用いて、 $\angle APB$ が最大になるような点 P はどこか探ることができます。また、コーナーフラッグを原点とし、シュートを放つ人が直線 $y=mx$ 上を動くとき、 $\tan \angle APB$ が最大値をとる点 P の軌跡を求めることで、特定のシチュエーションにおける最適なシュート位置の軌跡を調べることができます（詳細は、西元、2016）。

3. おわりに

今回は、「サッカーのシュートを決めるにはどのようにすればよいか？」という問いを例に、中学・高校の複数単元で実践可能な、同一の事象から段階的にモデル化の解像度をあげることができる題材を紹介しました。同じ問いからはじめることによって、数学の学習が進むにつれて何ができるようになったのか、どのようなモデルで考えられるようになったのかを学習者自身が実感することが、数学的モデリングの中高接続という観点から大切であると考えます。

引用・参考文献

- 文部科学省 (2018) 『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編』日本文教出版.
- de Almeida, L.M.W. (2018) Considerations on the use of mathematics in modeling activities. ZDM Mathematics Education 50, 19–30.
<https://doi.org/10.1007/s11858-017-0902-4>
- 竹内洋平・愛木豊彦 (2008) . 円周角の定理の有用性を実感できる教材の開発, 岐阜数学教育研究 .87-94.
- 数研出版編集部 (2023). 4STEP 数学 I + A.
- 西元教善 (2016) . シュートのベストポジションの軌跡～生徒の関心をひく軌跡と作図の問題として～. 数研通信 87 号, 2-5. (広島大学附属福山中・高等学校 教諭)