

相対度数のばらつきの見方：病院問題を題材として

いしばし いっぽ
石橋 一昂

1. はじめに

まずは次の問題を考えてみてください。

ある町に2つの病院があります。大きい病院では毎日およそ45人の赤ちゃんが生まれ、小さい病院ではおよそ15人が生まれます。よく知られているとおり、生まれる赤ちゃんの50%は男の子ですが、毎日必ずこの比率になるわけではありません。50%より多い日もあれば、少ない日もあります。

各病院では1年にわたり、赤ちゃんの60%以上が男の子だった日を記録しました。60%以上の日が多かったのは、どちらの病院でしょうか？

- 大きい病院
 - 小さい病院
 - ほぼ同じ（両者の差が5%程度）
- (Kahneman & Tversky, 1972, p. 443)

いかがでしたか？この問題（以下では、病院問題と呼びます）の正解は、「小さい病院」です。どちらの病院も、赤ちゃんの60%以上が男の子だった日を記録しているので、「ほぼ同じ」と考えた方もいらっしゃるのではないのでしょうか？それでは、解説します。

2. 標本サイズと相対度数のばらつきの関係

図1は、ある硬貨をくり返し投げる実験をしたときの、表の出た回数とその相対度数について整理したグラフです。このグラフは、標本サイズと相対度数のばらつきの関係を表しているグラフと見ることもできます。標本サイズと相対度数のばらつきの関係は、教科書等には標本や標本サイズという言葉は出てきませんが、中学1年生の統計的確率で学習され得ます（大谷，2021，p.3）。図1のグラフを見ると、投げた回数が少ないうちは、表の出た相対度数のばらつきは大きいですが、回数が多くなると、そのばらつきは小さくなることが読みとれます。また、投げた回数が少ないうちは、表の出た相対度数は0.5に近い値にならない場合もありますが、回数が多くなるにつれて、0.5に近い値になることも読みとれます。

ここで、硬貨の表と裏のどちらの面が出ることも同様に確からしい（50%は表）と考えることができ、病院問題では生まれる赤ちゃんの50%は男の子と仮定していることから、「硬貨を投げた回数」を「ある病院で一日に生まれた赤ちゃんの数」、「表の出た回数とその相対度数」を「男の子の数とその相対度数」と読み替えて、図1を見てください。すると、生まれた赤ちゃんの数が少ないうちは、男の子の相対度数のばらつきは大きく、0.5に近い値にならない場合もありますが、生まれた赤ちゃんの数が多くなるにつれて、そのばらつきは小さくなり、0.5

に近い値になると考えることができます。以上のことから、赤ちゃんの60%以上が男の子という状況は、一日に生まれる赤ちゃんの数が少ない、小さい病院の方が起こりやすいといえます。

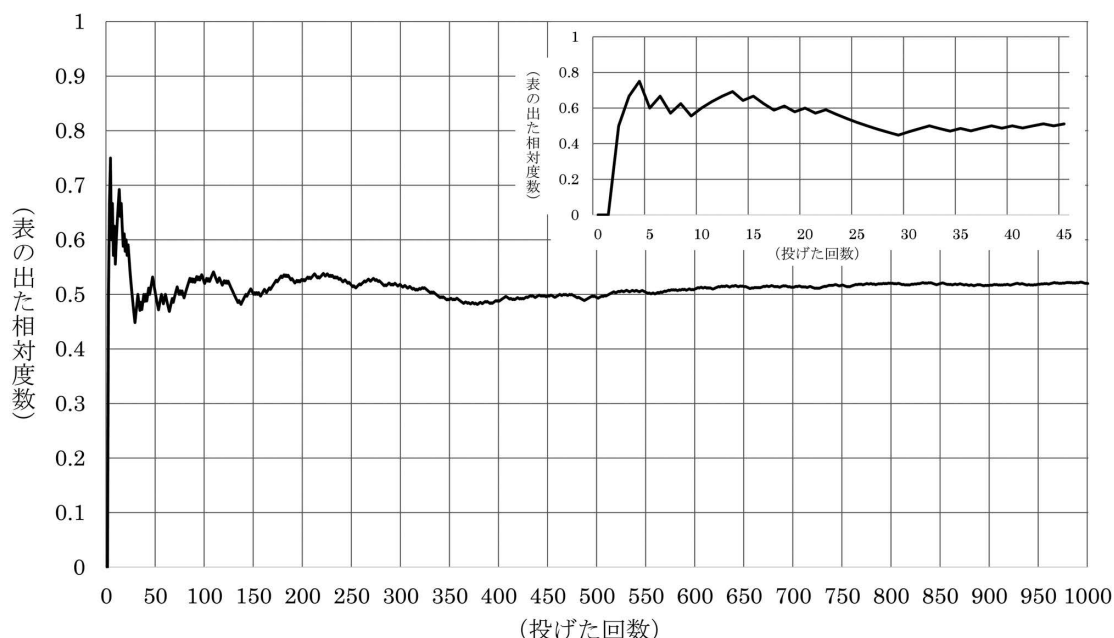


図1 ある硬貨をくり返し投げる実験をしたときの、表の出た回数とその相対度数
(中の図は、試行回数の少ない部分を拡大したグラフ)

3. 誤解の要因と理解の重要性

第2節で確認したように、病院問題は中学1年生で学習され得る、標本サイズと相対度数のばらつきの関係に基づいて考えることができる問題でした。しかしながら、認知心理学や数学教育の先行研究では、中学校や高等学校で確率を学んだ人でも、その多くが、「ほぼ同じ」と考えてしまうことが報告されています。例えば Kahneman and Tversky (1972) の研究に参加した大学生の正答率は約20%でした。Kahneman and Tversky (1972) によれば、参加者の多くは、標本サイズ(45と15)が異なるにもかかわらず、どちらの病院でも同じである男の子が生まれる可能性(50%)しか考慮していませんでした。その結果、彼らは「男の子の赤ちゃんが生まれる確率が同じなら、60%以上が男の子だった日が何日も続く確率も同じだ」と考え、「ほぼ同じ」を選択していたそうです。

このように、私たちは標本サイズと相対度数のばらつきの関係を誤解してしまいます。その一方で、情報化が加速度的に進む今日の社会において、標本サイズと相対度数のばらつきの関係を理解することは重要です。例えば、実際には正しい仮説であったとしても、標本サイズが小さければその仮説の実証に失敗する可能性が高くなります。また、このことを逆手に取り、意図的に標本サイズを小さくすることで、真実とは異なる情報を提示する人もいるかもしれません。つまり、標本サイズと相対度数のばらつきの関係は、情報の発信者としても、受信者としてもその理解が求められるため、全ての生徒にとって重要な学習内容であるといえます。

4. 授業の展開例

第3節では、標本サイズと相対度数のばらつきの関係が重要な学習内容であることを述べました。では、中学校ではどのような授業ができるのでしょうか？ここでは、病院問題を単純化した問題を題材に（石橋，2022 参照），2つの展開を考えてみます。

（1）葛藤を生じさせる展開

まずは、葛藤を生じさせる展開です。最初に、次の問題を提示し、生徒に予想させます。

A の賽銭箱には 15 枚硬貨が入っていて、そのうち 9 枚が表になっていました。B の賽銭箱には、45 枚硬貨が入っていて、そのうち 27 枚が表になっていました。A の場合と B の場合では、どちらの方が起こりにくいでしょうか？または、どちらの起こりやすさも同じでしょうか？

- A の方が起こりにくい
- B の方が起こりにくい（正答）
- どちらの起こりやすさも同じ

病院問題に関する先行研究の結果から、「どちらの起こりやすさも同じ」を選択する生徒が多いはずですが。予想させた後は、実際の硬貨や表計算ソフトウェアなどを用いた実験によって、生徒自身に予想を検証させます。すると、多くの生徒（「B の方が起こりにくい」以外を選択した生徒）にとっては、自分の予想とは異なる実験結果が得られます。ここで、生徒の予想と実験結果とのあいだで葛藤が生じることが予想されます。生徒はその葛藤を解消するために、標本サイズと相対度数のばらつきの関係を主体的に学ぶことが期待されます。

実験を通して、「どちらの起こりやすさも同じ」を選択した生徒が、自分の予想と実験結果が異なることを実感するためには、問題の数値設定を次のように変えてもよいかもしれません。

A の賽銭箱には 5 枚硬貨が入っていて、そのうち 3 枚が表になっていました。B の賽銭箱には、50 枚硬貨が入っていて、そのうち 30 枚が表になっていました。A の場合と B の場合では、どちらの方が起こりにくいでしょうか？または、どちらの起こりやすさも同じでしょうか？

- A の方が起こりにくい
- B の方が起こりにくい（正答）
- どちらの起こりやすさも同じ

下線部分が変更箇所です。このように2つの賽銭箱の標本サイズの比を大きくする（「45 と 15」から「50 と 5」）ことで、それぞれの賽銭箱において硬貨の 60% が表である確率の比は大きくなります。そのため、実験でも「B の方が起こりにくい」という結果が得られやすくなることが期待されます。

（2）数学的に正しい答えを導く直観を持たせる展開

次に、数学的に正しい答えを導く直観を持たせる展開です。最初に、次の問題を提示し、生徒に予想させます。

A の賽銭箱には 5 枚硬貨が入っていて、そのうち 5 枚が表になっていました。B の賽銭箱には、1000 枚硬貨が入っていて、そのうち 1000 枚が表になっていました。A の場合と B の場合では、どちらの方が起こりにくいでしょうか？または、どちらの起こりやすさも同じでしょうか？

- A の方が起こりにくい
- B の方が起こりにくい（正答）
- どちらの起こりやすさも同じ

下線部分が変更箇所です。Weixler et al. (2019) によれば、2つの賽銭箱の標本サイズの比を大きくした場合（「45 と 15」から「1000 と 5」）や、硬貨が表であった相対度数が 100% の場合は、生徒が数学的に正しい答えを導く直観を持つことができる可能性が高くなるそうです。確かに、5 枚中 5 枚が表の場合と、1000 枚中 1000 枚が表の場合であれば、後者の方が起こりにくいように思います。そのため、生徒の多くが「B の方が起こりにくい」を選択することが期待されます。予想させた後は、実際の硬貨や表計算ソフトウェアなどを用いた実験によって、生徒自身に予想を検証させます。すると、多くの生徒（「B の方が起こりにくい」を選択した生徒）にとって、自分の予想に合う実験結果が得られます。このような展開によって、多くの生徒が最初に数学的に正しい答えを導く直観を持つことができ、その直観が、その後の標本サイズと相対度数のばらつきの関係の学習の基礎になることが期待されます。

5. おわりに

本稿では、全ての生徒にとって重要な学習内容である一方で、多くの人が誤解してしまう標本サイズと相対度数のばらつきの関係について紹介させていただきました。また、病院問題を単純化した問題を題材とした授業の展開も提案させていただきました。中学校段階では確率を計算して比較することは難しいと思いますので、生徒が実感を伴って理解できるような展開にすることが大切だと思います。

文献

石橋一昂 (2022). 確率の多面的な見方を育む教材の条件：モデル化を視点として．日本科学教育学会誌 科学教育研究, 46(1), 104–112.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgement of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430–454.

大谷洋貴 (2021). 統計と確率の関連付け：推測ゲームを事例として．チャート .Info, 21, 1–4.

Weixler, S., Sommerhoff, D., & Ufer, S. (2019). The empirical law of large numbers and the hospital problem: systematic investigation of the impact of multiple task and person characteristics. *Educational Studies in Mathematics*, 100, 61–82.

（岡山大学 講師）