

数学的活動の充実をめざした「関数 $y=ax^2$ 」の授業実践

かわもと けんじ
河本 健二

1. はじめに

今年度より全面実施されている中学校学習指導要領では、数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を通して、学習を展開することが重視されています。この数学的活動は、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協動的に解決する過程を遂行すること」と示してあるように、問題発見、解決の過程を重視してあることは、周知の通りです。

数学の内容を理解し、それを覚えるよう指導することはもちろん大切ですが、学んだ数学を使って、身のまわりの問題をよりよく解決できる力を育成することは、それ以上に大切なことだと言えるでしょう。このような力を育成するために、それまでに身に付けたことだけでは解決できないような課題と出会わせ、こういうときは、どのように考えていけばよいのか、試行錯誤させながら解決の方法を生徒自身がつかんでいくような授業展開が効果的ではないかと考えます。そして、このような経験を通して身に付けた力が、これからの社会を生きていく生徒たちにとって、生きて働く力になるのだと思います。

ここでは、そのような授業展開を意識して取り組んだ「関数 $y=ax^2$ の利用」における授業実践を紹介したいと思います。

2. 授業実践について

本実践の教材は、3500 年ほど前に使われていたとされる水時計（穴の空いた容器に水を入れて時間を計っていた）を参考にして考えました（図 1*）。穴の空いた円柱状の容器に水を入れ、その穴から水を排出させていくとき、水面の高さは、水がなくなるまでの時間の 2 乗に比例するという関係があります。そこで、実験から得られたいくつかのデータから、この関係に気づき、2 乗に比例する関数だとみなすことで、1 分間を計るための水時計をつくろう、という授業展開を考えました。

授業の導入では、3500 年前に使われていたバケツの形をした水時計を紹介し、水を使って時間を計ることに関心を向けさせました。その後、バケツの形では考えにくいいため、形を単純化し、底に穴の空いた円柱状の容器で考えていくことにしました（図 2）。この容器は、約 40 秒までしか計れない高さにしておき、この容器をもとに、「1 分間を計るための水時計を作るには、何 cm の容器を準備すればよいか求めよう。」という



図 1



図 2

* 画像提供：早稲田大学エジプト学研究所

本時の課題を設定しました。この課題を設定した後、生徒たちと次のようなやりとりをしました。

T：「この容器だと、満杯にしても 40 秒くらいしか計れないけど、1 分間を計るための高さは、どうすれば求められるだろう？」

S：「その容器を実際に使って、水面の高さが何 cm だったら何秒かかるか、という実験（図 3）をしてみたいです。」

T：「では実際にやってみましょう。実際に容器を使って時間を計ります。まずは 16cm。（生徒を前に集めて実験する。）水がなくなるまでの時間は 38.2 秒でした。」



図 3

T：「じゃあ、次は水面の高さを半分の 8cm にしてみましょ
う。何秒くらいになると思う？」

S：「19 秒くらいかな。」

T：「どうしてそう思ったの？」

S：「だって水面の高さが半分になったから。」

T：「なるほど。では、実際にやってみましょう。」

S：「あれ、全然違う。27.1 秒だ。」

T：「みんなの予想とだいぶ違いましたね。では、この 16cm と 8cm のデータから、1 分間を計るのに必要な高さを求めてみましょう。……。あれ、なかなか進まないようですね。どうしました？」

S：「これだけでは関係が分らないです。もっと他の高さのときに何秒かかるかのデータがほしいです。」

この後、事前に私が準備しておいた、1cm 刻みでのデータを表示しました。

高さが半分になると、水がなくなるまでの時間も半分になるだろうという、自分たちの予想が裏切られる実験結果は、生徒たちの知的好奇心を高め、「やってみたい。考えてみたい。」という意欲をかき立てます。

また、1cm 刻みでのデータについては、時間にゆとりがあるなら、生徒と一緒に実験することも考えられます。しかし、高さが低くなると誤差が大きくなるため、理想的な数値からのずれが大きくなります。そこで、ある程度理想の数値に近い値となるように調整したデータを使いました。

【実験データ】																	
高さ (cm)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
時間 (秒)	0	9.5	13.5	16.6	19.1	21.4	23.5	25.4	27.1	28.6	30	31.8	33.2	34.6	35.9	37.2	38.2

1cm から 16cm までのデータが分かったことで、生徒たちは、本時の課題を解決するために、「水面の高さと水がなくなるまでの時間の関係はどうなるだろうか。」を考える必要があることに気づきました。この解決に向けて、表からとの関係を式に表そうとしたり、座標平面上に点

をプロットし、グラフの形を考えたりするなど、生徒たちはこれまでの関数の学習で学んできたことをもとに考えていきました。

しかし、水面の高さを x cm、水がなくなるまでの時間を y 秒とすると、 x と y の関係は、これまでに学んだ関数にはなりません。 y が x の 2 乗に比例するのではなく、 x が y の 2 乗に比例する関数になるのです。これは、3 年生で学んだ「関数 $y=ax^2$ 」の逆関数である、いわゆる無理関数になります。 x と y を逆にすれば、「関数 $y=ax^2$ 」として考えることができますが、この課題では、水面の高さを決めると、水がなくなるまでの時間が決まるため、水面の高さを x cm、水がなくなるまでの時間を y 秒とするのが自然です。そこで、生徒たちが x と y の関係を考えようとするときに、 x と y を逆に捉えようとするための手立てを考えました。それは、点をプロットする座標平面を、透明なシート（図 4）にすることです。

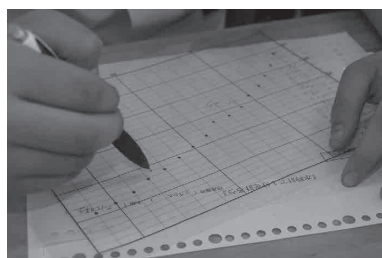


図 4

点をプロットすると無理関数のグラフが出てきますが、これは見方を変えると、「関数 $y=ax^2$ 」のグラフと見ることができます。シートを 90 度回転して裏返すことで、これまでに学んだ「関数 $y=ax^2$ 」とみなすことができます。この「90 度回転して裏返す」という操作は、「 x 軸と y 軸を入れかえる（ x 軸を縦軸にし、 y 軸を横軸にする）」ことと同じです。授業では、次のように進めました。

T:「透明のシートに点をとったけど、グラフはどうなりそうですか。」

S:「曲線になりそうですが、これまでに見たことのないグラフになりそうです。」

T:「そうですか。グラフから、 x と y の関係を捉えようとしたんですが、知らないグラフが出てきたんですね。でも、これまでに学んだグラフで似ているものはありませんか？」

S:「何か、2 乗に比例する関数のグラフに似ているかも。」

T:「どうすれば、同じように見えるのでしょうか。」

S:「このままだと違うけど、シートを 90 度回転させて裏から見ると、何か 2 乗に比例する関数のグラフのよう見えなくもないかも（図 5）。」

T:「90 度回転させて裏から見ると、もともとの x 軸と y 軸がどうなったんですか。」

S:「入れかわっています。 x と y を入れかえて考えると、 $y=ax^2$ として考えられそうだ。」



図 5

T:「 $y=ax^2$ とみなして考えられそうだということですね。」

しかし、グラフの見た目だけで、2 乗に比例する関数だとみなすことは、根拠として不十分です。そこで、次は、表をもとに、2 乗に比例する関数だとみなしてよい根拠を説明させることが大切です。

T:「でも、 x と y を入れかえて、 $y=ax^2$ とみなして考えていってよいという根拠は、グラフの形が似ているから、ということだけでいいですか。他にも、そう考えてよいという根拠がありませんか。例えば、この x と y の変化の様子が示してある表にはありませんか。」

S:「例えば、 $x=1$ のとき、 $y=9.5$ で、 $x=4$ のとき、 $y=19.1$ になっているけど、 y の値が約 2 倍になると、 x の値は 4 倍になっています。他にも、 $x=9$ のとき、 $y=28.6$ になっていて、 y の値が約 3 倍になると、 x の値は 9 倍になっています。 y の値が 2 倍、3 倍、……になると、 x の値は 4 倍、9 倍、……になっているので、 x は y の 2 乗に比例するとみなしていいと思います。」

T:「なるほど。その関係も成り立っているから、 x は y の 2 乗に比例するとみなしていいということですね。では、ここからは、 x と y を入れかえて考えてみましょう。水がなくなるまでの時間を x 秒、水面の高さを y cm として、 x と y の関係を式に表しましょう。」

S:「 $x=30$ のとき、 $y=10$ だから、 $y=\frac{1}{90}x^2$ とできます。」

T:「この式を使うと、1 分間を計るために必要な水面の高さが求められますね。」

S:「 $x=60$ のときの y の値を求めればよいので、40cm だと思います。」

授業の最後に、隠していた長い円柱状の容器を使って、実際に 40cm ので時間を計りました。前半は急激に減っていくため、失敗するんじゃないかとドキドキしながら様子を見ていた生徒たちでしたが、ほぼ 1 分という結果に、自然と拍手がわき起こりました (図 6)。



図 6

3. 終わりに

1 時間の実践だったため、授業はここで終了しましたが、この後は問題解決の過程を振り返ることで、生徒たちの学びがより深まると思います。この振り返りは、「水面の高さは、水がなくなるまでの時間の 2 乗に比例する。」というような内容面での振り返りで終わらないことを心がけるようにしています。課題を解決していく上で、どこでつまづいたのか、そして、どのような考え方で進めていったことで、うまく解決につながったのか、などのように、他の場面でも使える考え方を意識させるようにしています。例えば、この授業で私が生徒から引きだしたい振り返りは、「初めて出会う関数でも、既習事項と結びつけて考えることで、その関係を捉えることができるようになる。」や、「関係がはっきりと分かっている、ともなって変わる 2 つの数量は、表にまとめたり、グラフに表したりすると、関係が見えやすくなる。」などです。

このような振り返りは、数学の授業にとどまらず、これから先の日常生活においても、数学を使って問題を解決しようとする態度へとつながっていくでしょう。授業を通して育成された数学的に考える資質・能力は、次の数学の授業だけではなく、実社会において生きて働く力とならなくてはなりません。私たち数学教師は、このことを見据えて、数学の授業をどう展開していくのか、考えていく事が大切だと思います。(熊本大学教育学部附属中学校 教諭)