

正五角形になるための条件

きたじま
北島 かおる

1. きっかけ

事実 A：紙テープを結ぶと、正五角形ができる（図 1）。

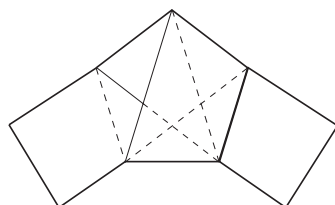


図 1

この事実は、中学校で学ぶ平行線の性質や三角形の合同、円周角の定理などを用いて何通りかの方法で証明できる。また、紙テープを数学的にどう表現するかといった問題は、「日常の事象」を「数学的に表現・処理し、問題を解決」する（「」内は中学校学習指導要領（平成 29 年告示）より）活動の素材としてもおもしろい。事実 A については、文献 [2] が詳しい。

さて、実際にこのことを授業で扱う際、まず確認すべきことは、何を言えれば正五角形であると示したことになるか、ということである。実際、生徒に問うてみると、「5 本の辺がすべて等しい」あるいは「5 つの角がすべて等しい」という答えがよく返ってくる。

そこで、本稿では、

課題：「凸五角形の m 本の辺と n 個の角がそれぞれ等しいことがわかれば、5 本の辺すべてが等しく 5 つの角すべてが等しいといえる」としたとき、できるだけ小さい m と n をみつける。

について考える。以下、凸五角形を「五角形」と表記する。

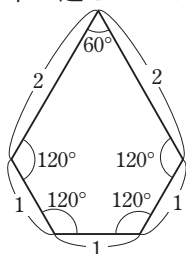
2. 正五角形になるための条件

結論から述べると、以下のうち 1 つを満たす五角形は正五角形である。

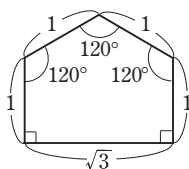
- (1) 3 本の辺と 5 つの角がそれぞれ等しい。
- (2) 4 本の辺と 4 つの角がそれぞれ等しい。
- (3) 5 本の辺と 3 つの角がそれぞれ等しい。

まず、これより少ない条件では、正五角形にならない例を示そう。（図 2）

〔3 本の辺と 4 つの角〕



〔4 本の辺と 3 つの角〕



〔5 本の辺と 2 つの角〕

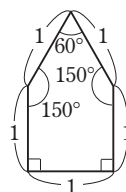


図 2

3. 証明のアウトライン

補題 1：円に内接している五角形について、5本の辺がすべて等しければ、正五角形である。

これは、五角形の5つの頂点を A, B, C, D, E とし、外接円の中心を O とおけば、O を頂角とする 5 つの二等辺三角形が三辺相等によりすべて合同であることから導ける。(図 3)

補題 2：円に内接している五角形について、5つの角がすべて等しければ、正五角形である。

図 4 で、 $\angle ABC = \angle BAE$ 、円周角の定理より $\angle ACB = \angle BEA$ 、AB 共通より、 $\triangle ABC \equiv \triangle BAE$ を示せる。よって、 $BC = AE$ 。同様にしてすべての辺が等しいことがいえる。

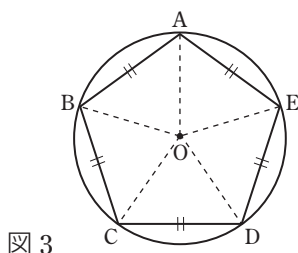


図 3

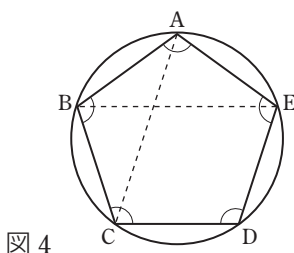


図 4

(1) 3本の辺と5つの角がそれぞれ等しい五角形は、正五角形である。

(ア) 等しい3本の辺が連続している場合 (図 5)

$\triangle ABE \equiv \triangle BAC$ より $BE = AC$ 。これと $BC = AE$ 、CE 共通より、 $\triangle BCE \equiv \triangle AEC$ 。

よって $\angle BCE = \angle AEC$ 。よって、 $\angle DCE = \angle DEC$ がいえるから、 $\triangle DCE$ は二等辺三角形である。頂角が等しいから、 $\triangle DCE \sim \triangle ABE$ …… ①。 $\angle DCE = \angle ABE$ になるから、 $\angle ECB = \angle EBC$ 。よって、 $\triangle EBC$ は二等辺三角形だから、 $EB = EC$ …… ②。

①、②より、 $\triangle DCE \equiv \triangle ABE$ となるから、すべての辺が等しいことがいえる。

(イ) 等しい辺のうち、連続していないものがある場合 (図 6)

$\triangle ABE$ は二等辺三角形であるから、 $\angle ABE = \angle AEB$ 、よって $\angle CBE = \angle DEB$ 。これと $\angle C = \angle D$ より、向かい合った内角の和は 180° になるから、四角形 BCDE は円に内接する。また、BC 共通、 $\angle ABC = \angle DCB$ 、 $AB = DC$ より $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ 。

よって、 $\angle BAC = \angle CDB$ であるから、円周角の定理の逆より 4 点 A, B, C, D は同一円周上にある。5つの頂点は同一円周上にあるから、補題 2 より正五角形といえる。

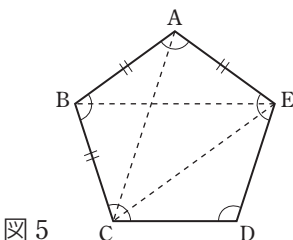


図 5

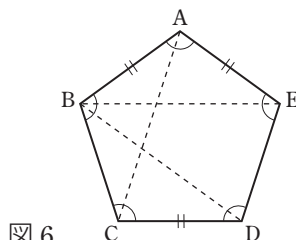


図 6

(2) 4本の辺と4つの角がそれぞれ等しい五角形は、正五角形である。

(ア) 等しいという情報のない角が長さの等しい辺にはさまれている場合 (図 7)

$\triangle ABE \equiv \triangle BAC$ より、 $\angle AEB = \angle BCA$ 。円周角の定理の逆より、4 点 A, B, C, E は同一円周上にある。また、 $\triangle BCD \equiv \triangle EDC$ より、 $\angle CBD = \angle DEC$ 。4 点 B, C, D, E は同一円周上にある。よって、5つの頂点は同一円周上にある。

円周角の定理より、 $\angle BAC = \angle BDC$ 。これを使って $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ がいえるから、 $AB = DC$ 。5本の辺が等しいから、補題1より正五角形。

(イ) 等しいという情報のない角と等しいという情報がない辺が接している場合 (図8)

$\triangle ABC \equiv \triangle AED$ より $\angle BCA = \angle EDA$ …… ①, $AC = AD$ 。

よって、 $\triangle ACD$ は二等辺三角形だから $\angle ACD = \angle ADC$ …… ②。

①, ②より、 $\angle EDC = \angle EDA + \angle ADC = \angle BCA + \angle ACD = \angle BCD$ 。

よって、5つの角が等しい。(1)より、正五角形になる。

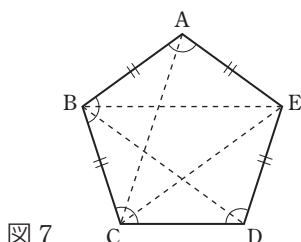


図7

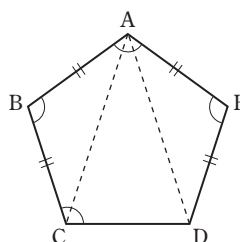


図8

(3) 5本の辺と3つの角がそれぞれ等しい五角形は、正五角形である。

(ア) 等しい3つの角が連続している場合 (図9)

$\triangle ABC \equiv \triangle BAE$, よって $\angle BCA = \angle AEB$ 。円周角の定理の逆より4点A, B, C, Eは同一円周上にある。また、 $\triangle ABE \equiv \triangle EDA$ より、 $\angle ABE = \angle EDA$, よって4点A, B, D, Eは同一円周上にある。補題1より、正五角形であることが示される。

(イ) 等しい角のうち、連続していないものがある場合 (図10)

$\triangle ABE \equiv \triangle DCE$ より、 $BE = CE$ …… ①, $\angle ABE = \angle DCE$ …… ②。

①より、 $\triangle EBC$ は二等辺三角形であるから、 $\angle EBC = \angle ECB$ …… ③。

②, ③より、 $\angle DCB = \angle DCE + \angle ECB = \angle ABE + \angle EBC = \angle ABC$ 。

同様に、 $\angle DEA = \angle BAE$ 。よって、5つの角がすべて等しい。これは正五角形である。

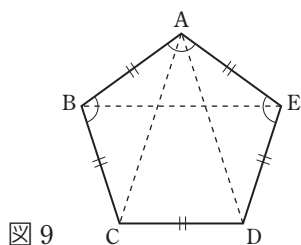


図9

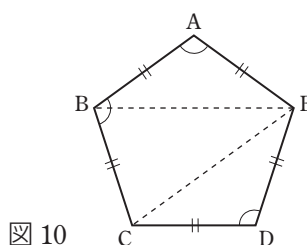


図10

4. 授業での活用

図2のように、少ない条件では成り立たない例を考えさせるところから始めるとよい。手を動かして、具体的に考える過程で対話や発見が生まれ、アクティブな授業になる。時間が許せば、グループごとに手分けをして各パターンを証明させるのもよいであろう。

引用・参考文献

[1] 文部科学省 『中学校学習指導要領 (平成29年告示)』

[2] 坂口果一 (1982) 『紙テープを結んで出来る多角形について』 奈良教育大学教育研究所紀要

(ノートルダム女学院中学校)