

数学的な見方・考え方は主体的に働かせることができるか？

はかまた りょうと
袴田 綾斗

1. 数学的な見方・考え方とは

平成 29 年告示の中学校学習指導要領において、数学科の目標は「数学的な見方・考え方を働かせ」という文言から始まります。本稿は、この「数学的な見方・考え方」の捉え方について、具体的な題材を交えながら考察していくものですが、それに先立って、まずは『中学校学習指導要領解説 数学編（平成 29 年 7 月）』に示されている捉え方を見てみましょう。解説には、数学の学習における「物事の特徴や本質を捉える視点や、思考の進め方や方向性」として、次のように整理されています。

「数学的な見方・考え方」のうち、「数学的な見方」は、「事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」であると考えられる。また、「数学的な考え方」は、「目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら、統合的・発展的に考えること」であると考えられる。以上のことから、「数学的な見方・考え方」は、「事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること」として整理することができる。 (p.21)

また、『算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ』の資料では、数学的な見方・考え方と学習活動との対応が例示されています。

事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、	数に着目する。数で表現する。量に着目する。図形に着目する。数量や図形の関係に着目する。 など
論理的に考えたり、	帰納的に考える。順序よく考える。根拠を明らかにする。 など
統合的・（に考える。）	関連づける。既習の事項と結びつける。 など
発展的に考えたりする。	適用範囲を広げる。条件を変える。新たな視点から捉え直す。 など

(p.15)

2. 数学的な探究と数学的な見方・考え方

以下では、あるゲームを題材にした数学的な探究活動を例として、数学的な見方・考え方の具体について考えてみたいと思います。

(1) 探究活動の事例

ここで取り上げるゲームは、『5 分でたのしむ数学 50 話』という本で紹介されているもの

で、次の手順でつくった「ラッキーナンバー」の数だけ賞品がもらえるというゲームです。

1. 好きな3桁の数を考えます。
2. それを2回並べて書き、6桁の数をつくります。
3. その6桁の数を7で割ったときの余りをラッキーナンバーとします。

実際に授業でゲームを行うと、生徒たちは数分である事実気づき始めます。お読みになっている先生方も薄々お気づきだとは思いますが、ラッキーナンバーはいつも0になり、誰も賞品はもらえません。そこで先生が一言、「みんなの数の選び方がうまくなかっただけなの？それともいつでも必ずそうなるの？」と問いかけることで、教室での探究が始まります。

この探究は、「ラッキーナンバーはいつでも0になるのだろうか」という問いへの答え、およびその説明・証明を構成する活動です。実際に問いを板書し、個人やグループで説明・証明を考えさせます。様々な説明・証明方法がありますが、ここではいくつか絞って例を挙げたいと思います。

- (ア) つくられる6桁のうち最小の数は100100で、これは7で割り切れる。次に大きい数は101101で、これは100100に1001を足したものである。1001は7で割り切れるから、101101も7で割り切れる。次以降の数も同様に7で割り切れるから、ラッキーナンバーはいつでも0になる。
- (イ) 最初の3桁の数を $100x+10y+z$ とおくと、つくられる6桁の数は $100100x+10010y+1001z=7(14300x+1430y+143z)$ となるから、ラッキーナンバーはいつでも0になる。
- (ウ) 3桁の数を2回並べて6桁の数をつくるという操作は、もとの数を1001倍することと同じである(乗法の筆算を板書するとわかりやすい)。1001=7×11×13であるから、1001倍された数は7で割り切れる。したがって、ラッキーナンバーはいつも0になる。
- (エ) みんなで協力してすべての場合で確かめる。

以上のような説明・証明が考えられますが、授業を行う学年や時期によってその質やバリエーションは当然ながら変わります。生徒の学習状況に合わせて、先生が働きかけながら探究を進めていくことになろうかと思います。

(2) 探究活動における「数学的な見方・考え方」の働き方

先ほど示した探究活動の例では、様々な「数学的な見方・考え方」が働いていたと考えることができます。まず、問いの設定段階において注目されるのは「いつでも」や「必ず」などの言葉です。中学1年生であれば、この言葉は先生が強調して示すことが必要になります。数学で大切なことの1つに、「例外なくすべてに当てはまる特徴や性質を探し、根拠を明らかにして説明すること」があることを知らせ、その文化への参加を促していくためです。中学2、3年生であれば、一般性に言及する言葉は生徒から自然に出てくることもあります。これはまさに、これまでに培ってきた数学的な見方・考え方が働いた瞬間であるということができそうです。

説明・証明を構成していく場面では、そのすべての活動に「根拠を明らかにする」という考え方が働いているはずです。さらに、上の例で挙げた(ア)～(エ)のそれぞれに対して、次

のような数学的な見方・考え方が働いていると捉えることができます。

(ア) 帰納的に考える。順序よく考える。数の変化の仕方に注目する。特に「差」に注目する。

不変なもの(今回は「差」)に注目する。適用範囲を広げる。など

(イ) 文字を使って表現する。一般的に考える。式の形に注目する。見通しをもって考える(7で割り切れることを示すには7で括ればよい)。など

(ウ) 数の構成のされ方に注目する。特に「積(比)」に注目する。操作の一般性に注目する(いつでも1001倍している)。など

(エ) 有限であるならばすべての場合を調べればよい、と考える。など

以上は、数学的な見方・考え方として捉えられるものの一例です。実際の授業では、説明・証明の結論までたどり着かないものも含めて、これら以外にも様々な見方・考え方が働くものと予想されます。

これまでに、あるゲームを題材にした事例を基に、探究活動においてどのような「数学的な見方・考え方」が働くのかを考察してきました。ここで、これまでの議論を振り返ってみると、次のことが言えるのではないのでしょうか。すなわち、数学的な見方・考え方の多くは、意識的に働かせるのではなく、多かれ少なかれ働いてしまうものである、ということです。上記の例においても、授業中に生徒が「よし、〇〇という見方をしてみよう」や「次は□□という考え方をしてみよう」と考えている姿はあまり想像できません。私達もそうであるように、探究活動は試行錯誤的に進んでいくものです。そのような活動の中では、探究のゴールまでの見通しが明確に見えていることは少なく、注目するポイントや、次に思考を進めていく方向性の多くが、活動中の状況に応じて、場面ごとに無意識的に決められているのではないのでしょうか。

ここで、表題の問いに対する私なりの答えを述べておきたいと思います。それは、「数学的な見方・考え方は主体的に働かせることはできる。しかし、その多くは意識的ではなく、無意識的に働かせていることに留意が必要である」というものです。主体的という言葉は、意識的であるというニュアンスを帯びやすい言葉だと思われます。しかし、主体的であったとしても、それに没頭していたり夢中になっていたりするが故に、無意識的な活動になっていることも十分にあり得ます。次節では、このことを踏まえ、授業実践への示唆に触れていきます。

3. 探究活動を展開する授業の目標と評価

探究活動における数学的な見方・考え方について、その多くが「働いてしまうもの」であると捉えることが必要であると述べました。以下では、それがなぜ必要なのか、ということについて、授業実践にあたっての留意事項と結び付けて考えていきます。

すでに触れましたが、探究活動とは本来、試行錯誤的に進んでいくものです。その時に採られる方法は事前に決まっているものではありません。一方、実際の授業を考えてみると、そこには「ねらい」や「教えたこと(知識、技能、考え方など)」があります。授業で探究活動を展開するとき、授業者としての意図が先行しすぎると、教材の提示の仕方、発問の言葉遣い、机間指導中の声掛けなどの様々な場面で、「何に着目してどのように考えていけばよいのか」ということを暗示・誘導してしまうことがあります。このことは、生徒が先生の意図を汲むこ

とによって、事前に決められていた方法による探究をしてしまう、ということを意味します。確かに、授業者が「働かせたい」と想定している見方・考え方が生徒から出てきたとき、そしてそれがクラスで共有された様子を見ると、私達は授業の目標が達成されたと感じてしまいます。しかしながら、その見方・考え方が「主体的」に働いていたものかどうかには疑問が残るのではないのでしょうか。むしろ、主体的に先生の意図を汲んだ結果の副産物として、見方・考え方が働いているように見えてしまっているのではないのでしょうか。「意識的に働かせるもの」という見方・考え方の捉えは、このように探究の幅を狭めてしまう可能性があります。

では、授業で探究活動を展開しようとするとき、授業の目標とその評価をどのように考えればよいのでしょうか。本来の探究活動を念頭におけば、目標、すなわち働かせたい見方・考え方は、事前には1つに定められないものです。そして、そのような授業では、事前に設定していた目標の達成程度について評価するのではなく、探究活動において「働いてしまった」見方・考え方を価値付けていくことが大切だと考えます。ここで「価値付け」という言葉を用いたのは、狭義の「評価」という言葉と区別するためです。評価には「段階を設けて評点をつけること」だけでなく、「対象となっているものごとに意味や価値を付与すること」という意味もあります。ここでは、後者の意味を強調するために「価値付け」という言葉を用いており、この価値付けこそが、探究活動を展開するうえでの先生の重要な役割の1つだと認識しています。

価値付けとは、具体的には次のような働きかけです。例えば、生徒が上記の例の(イ)によって問題を解決し、その方法を学級で共有したとき、「なぜこの方法を探ろうと考えたのですか?」、「なぜこの式の形にすればよいと考えたのですか?」などと問いかけることを通して、「例外なく、一般的に成り立つことを示すためには、文字を使って表現するという考え方がある」、「式の形に注目すれば、倍数や約数などの数の性質や特徴を示すことができる」という見方・考え方を顕在化させ、生徒にとっては無意識的になされていたかもしれない活動に、意味や価値を付け加えることができます。

探究活動において働く見方・考え方は、そのうちのいくつかを想定することはできても、事前に定めることはできません。したがって、生徒が働かせた見方・考え方を価値付けるためには、授業者自身が「価値ある見方・考え方」を知っておく必要があります。さらに、それを授業中に適切に見取らなければなりません。探究活動の評価では、従来よりも即時的な対応が重要になるとも言えます。これからの授業を考える上では、このように目標や評価についての捉え方についても議論を重ねていく必要があると考えます。

引用・参考文献

文部科学省(2017)『中学校学習指導要領解説 数学編』

中央教育審議会(2016)『算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ』

ペーレンツ, E. (2007). 鈴木直(訳)『5分で楽しむ数学 50 話』

(高知大学 助教)