

# どのような問題提示の工夫が、 数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を生じさせるか？

うえ が たに ゆうすけ  
上ヶ谷 友佑

## 1. 新学習指導要領は制約が多い！？

新学習指導要領には、数学科の目標として、「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す」（文部科学省，2017a p.65）が掲げられ、「知識及び技能」，「思考力，判断力，表現力等」，「学びに向かう力，人間性等」の3つの柱に沿った目標がそれぞれ示されています。現行の学習指導要領でも強調されていた「数学的活動を通して」という文言のさらにその前に、「数学的な見方・考え方を働かせ」が挿入されています。どうやら、「数学的に考える資質・能力」を育成する指導方法として、数学的な見方・考え方と数学的活動はどちらが欠けてもダメなようです。目標の中に達成手段まで書かれているというのは、何だかすごく制約の大きな目標のように感じます。とはいえ、穿った見方をしても仕方ないので、ここは好意的に解釈するようにしましょう。そう、「目標を達成するためには手段を選ばない」なんて台詞は、だいたい悪役の台詞なのです。私は、「目標を達成するために、きちんと手段を選ぶことにしよう」と理解することにしました。皆さんはいかがですか？

そう考えたとき、多くの人が次に思い浮かべる疑問は、「数学的な見方・考え方とは何か？」と「数学的活動とは何か？」、この2つだと思います。この問いに対する答えは諸説あるため、ここでそのすべてを網羅的にお示しすることはできませんし、以下にお示しする解釈は、文部科学省の意図をきちんと反映していないかもしれませんが、本稿では、私が個人的に「実践的に比較的使いやすい」と感じているものをご紹介しますと思います。そうすることで、実際の数学の授業をどのように工夫するかについての具体的な示唆をお示しできればと思います。

## 2. 数学的な見方・考え方とは何か？

職務上、教育実習生と話す機会はたくさんあるのですが、彼ら・彼女らは、しばしば「見方・考え方」を「～を見る，～について考える」と同一視してしまうようです。気持ちはわかるのですが、やはり「見方・考え方を働かせる」というからには、単に「見たり考えたり」するだけではいけません。見方・考え方の「方」の部分にも、きちんと意味があります。

「見方・考え方」という言葉の意味を理解するにあたって、ラディカル構成主義（グレーザーズフェルド，2012）と呼ばれる哲学の考え方が助けになります。まず、この哲学によれば、「見る」という行為は、常に「AをBとして見る」（seeing A as B）という行為です。例えば、我々は千円札を紙幣として見るかもしれませんが、千円札を紙切れとして見る外国人もいるかもしれません。数学でも同じです。水を注いだ時間と水位の関係を比例として見る、コンパス

を長さを測り取る道具として見る、2次方程式を「1次式の積=0」として見る、中央値を資料の代表値として見る、などなど、数学的な問題を解く際に「AをBとして見る」という行為は、到るところに登場する有用な方法のほずです。何を見ているかではなく、どんな風に見ているかが「見方」であると言えるでしょう。

次に、ラディカル構成主義は、「考える」という行為を、(1) どんな状況で、(2) どんな結果を期待して、(3) どんな活動をするか、という3観点で捉えます(この3観点を、専門的には「行為図式」と呼びます)。例えば、(1) 水位が不明な状況で、(2) 時間から水位が予測できると期待して、(3) 注ぐ速さを変化の割合とする1次関数を立式するとすれば、これは関数関係を利用した考え方であると言えます。これは、現実的な事象について考える際に用いる「数学的な考え方」です。他にも、(1) 2次方程式  $x^2=2$  の解が上手く表現できないという状況で、(2) 既知の知見と整合的な新しい表現となることを期待して、(3) 根号を導入するとすれば、これは数体系を拡張するという考え方です。これは、数学的な事象について考える際に用いる「数学的な考え方」です。何について考えているかではなく、どんな風に考えているかが「考え方」であると言えます。

「数学的な見方・考え方」は、学習指導要領解説で「事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること」(文部科学省, 2017b, p.21)と解説されていますが、これは、単にある瞬間に数学的に見たり考えたりするというものではありません。それは、まさにそのときの「見る方法や考える方法」が、特筆すべき価値を帯びている(他の類似した状況で類似した結果を期待してその方法が転用可能である、その方法の鮮やかさや手際よさが興味深いなど)という場合を表していると考えられます。したがって、誤解を恐れずに言えば、数学的な見方・考え方とは、一種の「問題の解き方」です。そう思うと、数学的な見方・考え方が、ぐっと馴染みのあるものに感じられないでしょうか? ただし、気をつけなければいけないことが1つあります。それは、数学的な見方・考え方とは、パターン化された問題が機械的に解けるようになるための「解き方」ではなくて、型にはまらない新奇な問題を柔軟に解けるようになるための「解き方」である、ということです。

### 3. 数学的活動とは何か?

「数学的活動」も、「数学的な見方・考え方」同様、捉えにくい言葉の1つです。そして、人によっては、「なぜわざわざ数学的活動を通してなのか?」という印象を持つ言葉であるかもしれません。例えば、学習指導要領解説において数学的活動は、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」(文部科学省, 2017b, p.23)とされていますが、こうした解説を読んだだけでは、そうした印象を受けるのも無理からぬことだと思います。なぜなら、この表現は、決定的な情報を欠いているからです。それは、活動と知識獲得との関係についての情報です。この表現では、教えたい知識が数学的活動を通じてでなければ学ぶことができない必然的な理由を欠いているのです。したがって、その点を補って解釈しなければ、数学的活動の必要性は見えてきません。

そうした解釈を助ける考え方の1つに、「問題場面の解決方法が知識になる」という考え方

があります (Harel, 2013)。これは、学習者の側から見れば、問題場面の解決方法を振り返ることで新しい知識が獲得できるということであり、教師の側から見れば、教えたい知識が必要となるような問題場면을授業で設定しなければならないということです。なお、ここでいう「知識」には、「三平方の定理」のような真偽の明確な知識も、「因数分解できるときは因数分解した方が楽に2次方程式が解ける」という、主観性の高い経験則のような知識も含めることにします。

例えば、根号を指導する場合について考えてみましょう。先の考え方に基づくと、根号という表記方法に関する新しい知識は、それが必要となる問題場面から生まれることになります。この場合、例えば、「ある数を表現しようとしたら、既知の表記方法（例えば小数）では正確に表すことができなかった」という問題場면을想定することができます。つまり、根号の導入に先立って、「何かを小数で表現する」活動が必要だということです。生徒達がこの活動を経験した後であれば、「小数では正確には表すことができないようだから、これからは根号という新しい表記方法を使うことにしましょう」という風に、根号の導入が円滑になります。

ただ、実際にこの内容で授業をしようと思ったら、もう一工夫必要かもしれません。例えば、「 $x^2=2$  となる  $x$  を小数で表してみましょう」という問題提示だと、どんなに一生懸命取り組んだとしても、結局小数では正確に表せないという結論になるため、結論を知ったあとになって、「解けない問題を出したんかい！」と不満を感じる生徒も少なくないと思います。これは、問題提示の仕方それ自体が、結論を暗示しすぎているということでもあります。そのため、耳学問で「表せない」と知っている生徒は、最初から活動することを放棄しようとするかもしれません。結論を聞きかじったことのある生徒でも、自然な形で「小数で表せない」ということを、実感を伴って再認識し、新しい表記方法の必要性を理解させたいところです。

そこで、「問題場面から新しい知識が生まれる」という原則に立ち返りましょう。「小数で表してみよう」という判断力や表現力も、「小数で表すことが有効である」という知識だと考えれば、これも、何かの問題場면을解決する過程から生まれてくる知識のはずです。問題解決にあたって、「ある数量を小数の概数として見る」ということは、数学的な見方・考え方の一種でもあります。

例えば、次のような問題はどうか？「縦 1.5m 横 12.7m の長方形の布から面積が  $2\text{m}^2$  の正方形の布を何枚か切り出したい。何枚切り出せるだろうか？」このような問題を解くためには、面積が  $2\text{m}^2$  の正方形の1辺の長さが、だいたいどれくらいであるか、という情報が必要になります。そのため、この問題は、自然と「小数で表そう」という発想が生まれやすい場面の1つとなっています。ちなみに、 $1.41 \times 9 = 12.69$  で、 $1.414 \times 9 = 12.726$  なので、面積が  $2\text{m}^2$  の正方形の1辺の長さが 1.414m よりもわずかに大きいということがわかれば、微妙に9枚目を取ることができず、8枚しか取れないということがわかります。「何枚切り出せるだろうか？」という問題を解く途中過程で、自然と「 $x^2=2$  となる  $x$  を小数で表す」という活動が出現するというわけです。

ポイントは、教師が生徒に対して「小数で表そう」と指示してしまうと、わざとらしい印象

を与えてしまうということです。教師に求められたわけではないのに、生徒が主体的に「小数で表そう」と思えるようにするためには、実際に生徒にやらせたいこと（この場合、小数で表す）が間接的に必要となる指示（この場合、何枚切り出せるか答えよ）を与えることが必要です。このような工夫は、生徒を自然と数学的な思考へと誘います。「数学的活動は、〔中略〕基本的に問題解決の形で遂行される」（文部科学省，2017b，p.59）とか、「数学的活動は、生徒にとって数学を学ぶための方法である」（文部科学省，2017b，p.59）と言われる所以は、まさにこういった「指導の間接性」に見出すことができるのです（上ヶ谷，2015）。

#### 4. 数学的な見方・考え方が自然と現れる数学的活動を目指して

本稿では、目標を達成するためには手段を選ぼう、ということから出発して、実践的に比較的使いやすい「数学的な見方・考え方」観と「数学的活動」観をお示しさせていただきました。まず、数学的な見方・考え方とは、単に見たり考えたりするだけでなく、どんな風に見たり考えたりするか、その仕方が重要でした。次いで、数学的活動とは、教えたい知識が必要となるような問題場면을授業で設定することで生じる活動であり、それは、教えたい知識（特に数学的な見方・考え方）が間接的に必要となる指示を上手く出してやることで、意図的に生じさせることができると期待されるものでした。こうすることで、生徒達が主体的に数学的活動に従事する中で、自然と知識を見出していくという姿を、授業において実現することができるようになります。

ただし、もちろん実際の生徒達は、そう都合よく知識を見出してくれるわけではありません。教師の仕事は、問題を提示したら終わり、ではなくて、むしろそこから何をするかにかかっています。生徒の主体性を損ねないように上手く問題解決を支援する方法については、現在鋭意研究中ですので、また折を見てご紹介できたらと思います。

#### 参考文献

- グレーザーズフェルド，E. v. (2010). 『ラディカル構成主義』（西垣通 訳）. NTT 出版.
- Harel, G. (2013). Intellectual Need. K. R. Leatham (Ed), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 119–151). Springer New York.
- 文部科学省 (2017a). 『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）』
- 文部科学省 (2017b). 『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 数学編』
- 上ヶ谷友佑. (2015). 「「予想すること」に関する数学的な暗黙知の教授可能性」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』（臨時増刊 第 48 回秋期研究大会特集号），97, 25–32.

（広島大学附属福山中・高等学校）