

「統合的・発展的に考える」という視点から 次の時代の数学科授業を考える

ふなはし ゆか
舟橋 友香

1. 次期学習指導要領における「数学的な見方・考え方」

平成 29 年 3 月に次期学習指導要領が告示され、6 月には学習指導要領解説も文部科学省のホームページに掲載され、いよいよ時代の大きな転換点を迎えようとしています。今回の改訂では、すべての教科の教科目標に「見方・考え方を働かせ」という言葉が冒頭に位置づけられている点に特徴があります。この「見方・考え方」は、答申の中で「どのような視点で物事を捉え、どのような考え方で思考していくのか」という、物事を捉える視点や考え方」(p.33)とされ、各教科等における学びの過程の中で鍛えられていくものだと説明されています。すなわち、「見方・考え方」はそれ自体が幼児期から小学校、中学校、さらに高校、大学へと成長していくものとして位置づけられているところに従来との決定的な違いがあります。従って、子ども達はそれまでに経験してきたことの中にこれから新たに学ぶ内容に通じる見方・考え方を持っているのであり、教師はそれを見落とさずに引き出し、新たに学ぶ内容を位置づけていくことが求められてきます。

では中学校数学科で育成を目指す「見方・考え方」とはどのようなもののでしょうか。学習指導要領解説において、中学校数学科における「数学的な見方・考え方」とは、「事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること」と整理されています(p.21)。特に、「今回の改訂では、統合的・発展的に考えることを重視している」(p.21)とあります。そこで本稿では、この「統合的・発展的に考える」というキーワードに焦点をあて、「統合的・発展的に考える」とどのように数学の世界が広がっていくのか、中学校数学科における具体例を通して考えてみることにします。

2. 「統合的・発展的に考える」という視点で素材を見直す

現行の「中学校学習指導要領解説 数学編」(文部科学省、2008)の中学校第3学年「A 数と式」領域には、「(2) 文字を用いた簡単な多項式について、式の展開や因数分解ができるようにするとともに、目的に応じて式を変形したりその意味を読み取ったりする能力を伸ばす」という項目があります。この下位項目の「ウ 文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明すること」に関わる具体例として、「連続する二つの偶数の積に1をたすと奇数の2乗になる」ことを説明する場面が挙げられています。この具体例は、次期学習指導要領解説でも掲載されています(pp.138-139)。現行の解説と異なる部分は、想定される学習過程に関する説明の中で、文字を用いた式で説明することで「簡潔・明瞭・的確に表現」できることを指摘している点、及びこの具体例が「証明を読んで新たな性質を見いだすこと」と関わる内容であり、「統合的・

発展的に考える力を養うために必要なものである」ことを指摘している点です。解説の中では、 $2n(2n+2)+1=(2n+1)^2$ という式の変形を振り返り、「奇数の 2 乗」という部分が「二つの偶数の間にある奇数の 2 乗になる」ということを見出すところで探究が終わっていますが、「統合的・発展的に考える」ことを以下のようにさらに進めていくことができます。

(1) 具体的に考えてみる

本稿では、「連続する二つの偶数の積に 1 をたすと、どのような数になるか」という問いからスタートしたいと思います。まずは、問われた場面を具体的に考えてみることから始めます。例えば、自然数の中で一番小さな偶数は 2 なので、2 から順に問われた場面を書いてみます。

$$2 \times 4 + 1 = 8 + 1 = 9$$

$$4 \times 6 + 1 = 24 + 1 = 25$$

$$6 \times 8 + 1 = 48 + 1 = 49$$

9, 25, 49 という数から、連続する二つの偶数の積に 1 をたした数は、平方数であることが見えてきます。さらにそれは連続する二つの偶数の間にある奇数の平方ということが分かります。

(2) 発見したきまりがいつでも成り立つか

そこで、帰納的に発見したきまりが一般的に成り立つことを文字を用いて証明していきます。まず、二つの連続した偶数は、自然数 n を使って次のように表されます。

$$2n, 2n+2$$

この二つの連続した偶数の積に 1 を加えると、

$$\begin{aligned} 2n(2n+2)+1 &= 4n^2+4n+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ &= (2n+1)^2 \end{aligned}$$

となります。 n は自然数ですから、二つの連続した偶数の積に 1 を加えると、その間の奇数の 2 乗になります。

(3) 「1 をたす」とは何をしているのか

ところで、はじめに問われた場面では、「1 をたす」という操作がありますが、これに少々不自然さを感じます。そこで、「1 をたす」ことの意味を考えてみましょう。そのために、「1」を自然数 a に置き換えると、二つの連続した偶数の積に a を加えることは、②の式で表されます。

$$2n(2n+2)+a=(2n)^2+2n \cdot 2+a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

先ほどの結論では、②の式を整理すると平方数となっていました。したがって、②の式も $2n$ の 2 乗の項に着目すると b をある自然数として $(2n+b)^2$ となるはずで、この式を展開すると、

$$\begin{aligned} (2n+b)^2 &= (2n)^2+2 \cdot 2n \cdot b+b^2 \\ &= 2n(2n+2b)+b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となります。③で得られた式と①の式の係数を比較してみましょう。すると、次の二つのことが見えてきます。一つは、「1 を加える」と言っていた「1」は「 b^2 」つまりある自然数の 2

乗であったこと、もう一つは、二つの連続した偶数のうち後者を表す「 $2n+2$ 」の「2」は「 $2b$ 」つまり2にある自然数をかけたものであったということです。後者のことについてさらに考えてみると、「二つの連続した偶数」と「その間の奇数」という関係を発展させて捉えることができます。「二つの連続した偶数」と「その間の奇数」は小さい順に「 $2n, 2n+1, 2n+2$ 」となりますが、③の式ではこれに対応した部分が「 $2n, 2n+b, 2n+2b$ 」となります。つまり、はじめの場面では連続する自然数を考えていたために b が1であったけれど、三つの数の間隔 b は1に限らず自然数の範囲であればどんな値でもよいことが分かります。(図1)

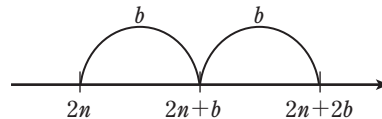


図1 $2n, 2n+b, 2n+2b$ の関係

(4) 「偶数」からはじめなくてもよいのではないか

上述の考察から、「二つの連続する偶数」とその「間の奇数」という三つの自然数に限らず、それらの間隔が等間隔であればよいことが分かりました。すると、数の間隔が等しいことがこの問題の本質ならば、はじめの数は「 $2n$ 」すなわち「偶数」でなくてもよいのではないかと考えます。そこで、自然数 s, t を用いて、はじめの自然数を s 、間隔を t とおくと、三つの自然数は「 $s, s+t, s+2t$ 」と表すことができます。(図2)

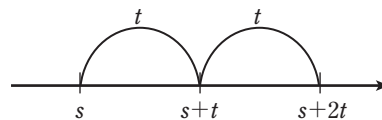


図2 $s, s+t, s+2t$ の関係

このとき、 s と $s+2t$ の積に間隔 t の2乗を加えた数は、

$$\begin{aligned} s \cdot (s+2t) + t^2 &= s^2 + 2st + t^2 \\ &= (s+t)^2 \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

となり、中央の自然数の2乗になることが分かります。実際、はじめの自然数が3、間隔が5である三つの自然数「3, 8, 13」では、 $3 \cdot 13 + 5^2 = 39 + 25 = 64 = 8^2$ となり、中央の自然数8の2乗になります。

(5) 自然数の範囲に限らなくてもよいのではないか

④の式では、 s と t は自然数としていましたが、式を読むと、自然数の範囲に限らず、実数の範囲に広げても成り立つことが分かります。例えば、はじめの数が0.3、間隔が0.2である三つの数「0.3, 0.5, 0.7」では、 $0.3 \cdot 0.7 + 0.2^2 = 0.21 + 0.04 = 0.25 = 0.5^2$ となり、中央の数0.5の2乗になります。また、はじめの数が $\frac{1}{3}$ 、間隔が $\frac{1}{2}$ である三つの数「 $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}$ 」では、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{25}{36} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

となり、分数でも同様に成り立つことが確認できます。具体例は省略しますが、 s や t が負の場合も同様に考えることができます。

上述の「連続する二つの偶数の積に1をたすと、どのような数になるか」という問いからスタートした探究について、「統合的・発展的に考える」過程を振り返ってみましょう。まず、具体的ないくつかの事例から、それらを統合して捉える視点「連続する二つの偶数の積に1をたすと、その間にある奇数の2乗になる」ということを見出しました。そして、見出した事柄がいつでも成り立つことを、文字を用いた式によって証明しました。次に、「1をたす」という部分に着目し、これが問題の構造をどのように規定しているのか、文字を用いた式の意味を解釈することにより発展的に考察しました。その結果、「三つの自然数が等間隔であること」が問題の本質であり、間隔は「1」だけでなく自然数全体で成り立つことを見出しました。さらに、はじめの数は偶数に限らず任意の自然数で成り立つことを文字を用いた式により確認し、その式を読むことで、最終的に実数まで範囲を広げても成り立つことが明らかになりました。すなわち、「ある実数 s とそれと $2t$ 離れた実数 (t : 実数) の積に間隔 t の2乗をたすと、その間にある実数 $s+t$ の2乗になる」という、はじめの問題場面と新しく見出したものとを統合的に捉える視点が得られました。

3. おわりに

本稿では、次期学習指導要領で示された数学科の目標のキーワードである「統合的・発展的に考える」ということはどのようなことか、既に現行の学習指導で扱われている素材を用いて考えてきました。その過程では、不自然さを感じてどうなっているのか考えてみようとする気持ち、もっと広い範囲でも成り立つことを考えようとする気持ちが、探究を進展させる大きな契機となっていました。このような、言わば「思考や行為を改善し続けてやまない傾向」(文部省, 1951)をいかに日々の数学科の学習指導の中で育成していくか、これが次の時代の数学科授業を考える上での課題と言えるでしょう。

引用・参考文献

- 中央教育審議会(2016) 幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について(答申).
- 文部省(1951) 小学校学習指導要領 算数科編(試案).
- 文部科学省(2008) 中学校学習指導要領解説 数学編, 教育出版.
- 文部科学省(2017) 中学校学習指導要領解説 数学編.

(奈良教育大学 准教授)