

新しい学習指導要領における数学的活動をいかに実現するか

なかがわ ひろゆき
中川 裕之

1. 新しい学習指導要領における数学的活動～プロセスの重視～

新しい学習指導要領において「数学的な見方・考え方」は、教科の目標や評価の観点ではなく、数学という教科の特質に応じた物事を捉える視点や思考の進め方、方向性を意味するものとなり、「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、根拠を基に筋道を立てて考え、統合的・発展的に考えること」と定義されました。そして、数学的な見方・考え方を働かせて行われる数学的活動も、数学的に問題を発見し、解決する過程と位置付けられています。その結果、数学的活動の定義は、従来の「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」という活動の内容を示したものから「事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」という問題発見、解決のプロセスを示したものに変わりました。

さらに、数学的活動を集約する3つの観点も、次のようにプロセスを具体的に示したものに変わりました（次のものは中学校第2、3学年のもの）。例えば、現行の学習指導要領においてアの活動に相当するものは「日常生活や社会で数学を利用する活動」と活動の内容が示されていたのに対して、新しい学習指導要領ではどのような活動をすればよいのかといったプロセスが明確にされています。

- ア 日常の事象や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決したり、解決の過程や結果を振り返って考察したりする活動
- イ 数学の事象から見通しをもって問題を見だし解決したり、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察したりする活動
- ウ 数学的な表現を用いて論理的に説明し伝え合う活動

これらの変更からは、新しい学習指導要領が学習や問題発見・解決のプロセスを重視していることがうかがえます。

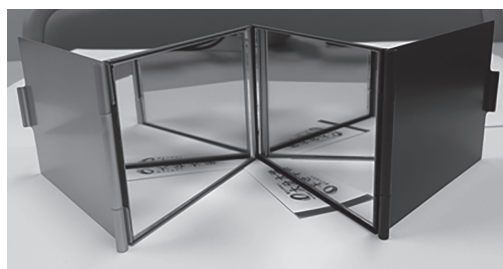
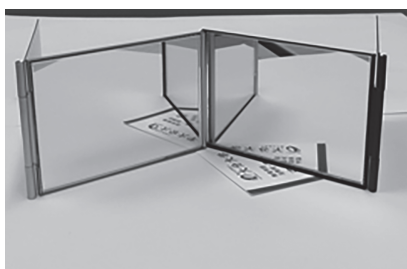
では、新しい学習指導要領が意図するような数学的活動を授業において実践しようとするとき、どのような思考や活動を想定して授業を構想すればよいのでしょうか。本稿では、そのことについて具体的な場面をあげて考えてみたいと思います。

2. 事象の数学化その1

平成29年度の全国学力・学習状況調査の数学Bでは、第一問に万華鏡の問題が出題されています。中学校の先生方からはB問題の一問目で様々な模様が出てきて生徒が戸惑っていたという感想を多く聞きました。その問題は日常事象を対称性から捉えることを意図したものですので、文部科学省としてはそのような問題や事象を数学の授業で扱ってほしいと考えている

と思われます。それに対して先のような感想が聞こえてくるということは、あまりそのような授業が実践できていないということではないのでしょうか。そこで、ここでは、2枚の鏡に映る像を題材として、新しい学習指導要領で意図した数学的活動を実現する授業について考えたいと思います。

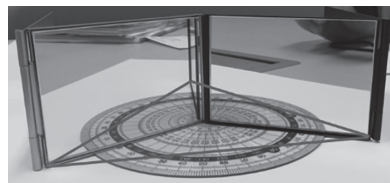
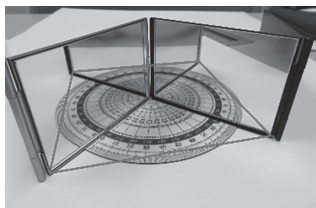
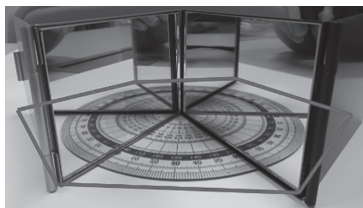
2枚の鏡を組み合わせて、そのなす角を小さくしていくと、鏡の中に複数の鏡が現れてきます。角度を変えると鏡に映る像は変化していきますので、どのような規則で変わっていくかを明らかにしたいと思います。



そこで、この場面を数学的に扱うことを考えたいのですが、このままでは数学が使えません。「日常の事象を数理的に捉えること」を考える必要があります。このような数学化では、数量や図形などに着目して事象の特徴を捉えることが大切です。ここでは、既に「鏡のなす角の大きさ」という数量が出てきていますが、鏡に映る像をどのように捉えるべきかが明確になっていません。そのため、下の図のように「鏡の端を結んだ図形」として鏡に映る像の特徴を捉えることにします。事象の数学化の仕方は多様ですので、この捉え方が絶対ではありませんが、ここでは、一応このように捉えて問題を設定してみます。

数学化した問題：鏡のなす角と鏡の端を結んだ図形にはどのような関係があるだろうか。

このように数学化した問題を設定できれば、教科書にあるような問題と似てきます。ここで必要となるのは、目的に応じて式、図、表、グラフなどを活用して数学的に処理する能力です。ここまでくれば、多くの生徒が様々な角度の場合を調べて表に整理すれば関係が明らかになるはずと見通しを立て、問題を解決できるのではないのでしょうか。

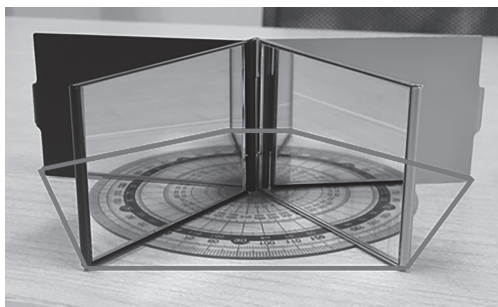


実際にやってみると、 60° の場合には正六角形、 90° の場合には正方形、 120° の場合には正三角形ができます。その結果から、(鏡のなす角の大きさ) $\times$ (正多角形の辺の数) $=360$ という関係が見つかります。つまり、なす角の大きさと辺の数には反比例の関係があることを見いだせます。そして、関係が見つかり、正五角形をつくるには鏡のなす角を 72° にすればよいといったように、実際につくってみなくても図形から鏡のなす角を求めることもできるようになります。

3. 事象の数学化その2

このように考えてくると、鏡のなす角と鏡に映る像の関係が明確になったと思うかもしれませんが、しかし、よく考えてみると、正多角形の辺の数は自然数ですから、鏡のなす角の大きさが 360° の約数の場合しか解決できないことになります。つまり、鏡のなす角が 360° の約数ではない場合、例えば、 70° のときの鏡に映る像、つまり鏡の端を結んだ図形は求めることができないのです。

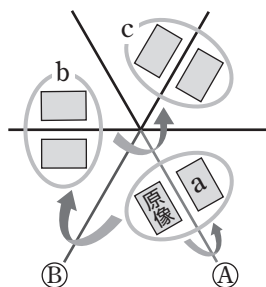
72° のときには正五角形、 60° のときには正六角形になるので、その間に正多角形は存在しないはずです。では、 70° の場合にはどんな図形になるのでしょうか。いろいろと想像してみるのも楽しいのですが、ここでは、なす角を 70° にしてどんな図形になるかを実際に確かめてみたいと思います。すると、右のように、いびつな六角形になることが分かります。つまり、正多角形にならない場合があるのです。しかし、なぜこのような図形になるかが分かりません。



そこで、もう一度、今度は別の数学の概念を用いて数学化を行ってみたいと思います。そもそも鏡の端を結んで多角形ができるのはなぜなのでしょう。その理由を明らかにするには、元の対象（原像）と鏡に映る像の関係を探る必要があると考えます。そこで、「図形の移動」という数学の概念を使ってこの事象を捉えることを考えると、次のように数学化した問題を設定できます。

数学化した問題：鏡に映っている像は、原像がどのように移動してできたものか。

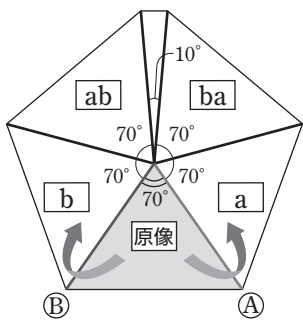
原像と鏡に映る像の関係を調べるために、鏡のなす角が 60° の場合で、次のように鏡の前に対象物（付箋）を置いてその移動を分析してみます。



付箋は鏡の中に5つ映っています。この場面の移動での捉え方には様々なものが考えられますので、ここではその1つを取り上げてみたいと思います。まず、鏡①によって原像はaに移ります。その際の移動は対称移動です。そして、原像とaをセットとし、そのセットの移動を考えると、今度は鏡②によってbのセットに移ります。これも対称移動です。すると、最後にcのセットが残りますが、これはbのセットが鏡①によって対称移動したとみなすことができます。つまり、5つの像のでき方は対称移動によって解釈できます。

そこで、鏡のなす角が 70° の場合も対称移動で解釈することを試みます。 70° の場合の図形は次のようになります。鏡は①と②の2枚だけですので、それらの鏡を軸として対称移動す

ることを考えます。ここでは、原像を鏡の間のスペース（頂角 70° の二等辺三角形）とすると、**原像**は鏡①によって**a**に移動します。また、鏡②によって**原像**は**b**に、**a**は**ab**に移動します。さらに、**b**は鏡①によって**ba**に移動します。もちろん、**ab**も鏡①によって、**ba**も鏡②によってさらに対称移動するのですが、それらは自分自身と重なってしまい、視覚的にほとんど現れず、その一部が頂角 10° の二等辺三角形として現れるのみです。



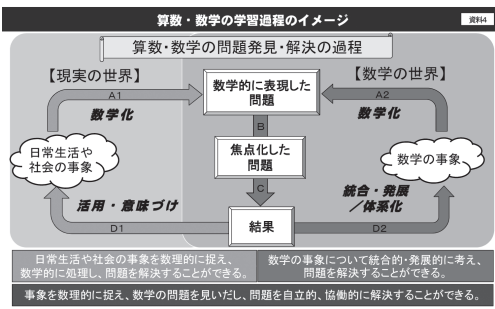
このように事象を対称移動から捉えると、いびつな六角形ができる理由が明確になります。そして、最初に考えた正多角形となる場合は対称移動によって重なる部分が出ない場合であったと解釈できます。

4. おわりに

本稿では、まず、2枚の鏡の映り方を考察する中で、鏡のなす角の大きさと鏡に映る像の関係を探りました。そこでは、鏡に映る像を数学的に捉えるために、鏡の端を結んでできる図形とみなしました。そうした数学化により、数学的な手法を用いて処理することが可能となり、正多角形になる場合について関係を明確にしました。しかし、正多角形にならない場合についての疑問が生じたことから、別の数学化を行い、図形の移動といった数学的な概念に基づいて事象を考察し、鏡の端を結ぶと多角形ができる理由を明確にしました。

新しい学習指導要領で意図されている数学的活動を授業で実現するには、まずはその具体的なイメージを持つことが重要です。そのため、本稿では一例ですが、具体的な教材や活動を示し、数学的活動について考察してきました。

数学的活動を捉えるイメージとしては、右のような図が文部科学省から出ています。数学的活動を実現するには、日常生活や社会の事象の数学化の過程を授業に含めることが大切となります。ここでは、事象をどうやって数学の舞台にのせるかがカギとなります。授業では教師が数学化を一方的に行うのではなく、生徒と話し合って様々な数学化の仕方を試すような活動も考えられるでしょう。また、図では数学的活動がサイクルの形で示されており、本稿で数学化を2回行ったように、事象を解明するために数学的活動のサイクルを何周かすることも想定されています。



そのような活動を実現する教材や授業の開発が期待されているのです。難しいことではありますが、本稿で示した例を参考に、そのような授業が構想、実践されることを願っております。

引用文献

中央教育審議会算数・数学ワーキンググループ (2016) 「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ」

(大分大学 准教授)