

# 問題解決の授業は、生徒による「数学の探究」から始めよう

さかもと まさひこ  
坂本 正彦

## 1. はじめに

平成 29 年告示の新学習指導要領及び解説でも、「数学的活動の一層の充実」が求められており、同時に、「数学的活動は、基本的に問題解決の形で行われる」ことが示されている。現行の「数学的活動とは、生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」とは表現が変わったが、「従来の意味をより明確にしたもの」と、引き続き数学的活動が求められている。それでは何故従来の意味を「より明確」にしなければならないのか。数学の教室では、生徒が目的意識をもって主体的に取り組む活動がなされていないからか。あるいは、「基本的に問題解決の形で行われ」「試行錯誤をしたり、資料を收集整理したり、観察したり、操作したり、実験したりすることなどの活動」が教室では実現されていないからなのか。問題解決の形を、「疑問や問いの発生、その定式化による問題設定、問題の理解、解決の計画、実行、検討及び新たな疑問や問い、推測などの発生と問題の定式化と続」かせていないからか。

今回の学習指導要領解説では、「資質・能力」の項に示された、「問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとする態度、多様な考えを認め、よりよく問題解決しようとする態度」の育成を主眼に置けば、数学科の授業では、知識伝達型の授業と決別し問題解決の中で数学的活動の充実を図るよう授業を構成し、展開せよという明確な主張が読み取れる。

## 2. 数学科における問題解決について

数学科の教室における問題解決過程は一つの定型に収まるわけではないが、敢えて中学校の数学の授業場面を想定しながら G. Polya の問題解決過程<sup>1)</sup>を参考に捉え直してみると、概ね、

(1) 条件を整理する、(2) 仮説を立てる、(3) 仮説の妥当性を高める、(4) 帰納的・類推的に説明する、(5) 演繹的に説明する、(6) 解決過程を振り返り、知見にまとめる

となろう。このような生徒が主体的に活動する場面を、授業設計、授業展開の中に位置づけていくことが指導に当たる教師に求められることとなる。そのために何に焦点を当てるべきか。筆者は、生徒自身による課題とされる数学への探究だと考える。数学を探究する場面を思い出すとき、探究者は、必ず、探究結果を得るという明白な「目的意識をもち、主体的に」関わっている。これはまさに数学的活動そのものである。説明し合う活動（各自の探究結果を他者とすりあわせしながら精緻化する活動）や他への応用・活用（学んだことの価値を認識する活動）は、その次に来るべきものである。即ち、数学的活動の実現には、対象となる数学が、授業の中で生徒にとっての探究の対象となるように設定されなければならない。

また新学習指導要領では、その前文に教育基本法が引用され、数学科の授業においても、「人格の完成」が目指されるべきことが示された。一方、数学教育において問題解決の重要性が示されたのは、昭和 22 年の学習指導要領（試案）から、現代学習指導要領の編纂まで関わった

和田義信による。和田は、数学教育からみた望ましい人間像として、

- (1) ひとりになりきれ人間
- (2) ものごとを創造し続けるとともに、自分のことが分かる人間
- (3) 反省的思考を身につけた人間

の3点を挙げた。そのために「学習は広義の問題解決 (Problem Solving) という行動の方をと」り、それは、「単に子どもが自ら計画を立て、興味をもって活動するのに都合がよいというだけでなく、そういう経験が、やがて、人生として必要な基本的訓練となるのだということを理解しなければならない」点にあることを強調する<sup>2)</sup>。即ち、戦後数学教育は人格の完成を目指すためになされ、その為に問題解決を通して学習させることが示されたのである。また数学の学習が「人生として必要な基本的訓練」であるならば、その意図を達成するための配慮は不可欠で、教材選定、教室環境の整備、授業展開方法の検討は必須となる。

### 3. 問題解決のための題材と展開例

問題解決のための題材選択では、古典の参照が授業展開の幅を広げてくれることがある。

中学校3年では、円の発展的内容として、「方冪の定理」が扱われる。証明は三角形の相似条件によることが多いが、Euclid 原論では、三平方の定理を用いて証明される。何故か。原論の構成から見ると、方冪の定理は、原論全13巻中、第3巻の命題35-37にあり、三平方の定理(第1巻命題47)は証明済みだが、三角形の相似条件(第6巻命題4-6)はまだ証明されていない命題だからである。よって三平方の定理を学んだ中学3年生にとって、方冪の定理が成り立つかどうかは、新たな探究課題として位置づけられる。

Euclid 原論では、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad \cdots \textcircled{1}$$

の両辺に  $PO^2$  を加えた式を作り、それを証明する。技巧的であるが、そもそも弦 AB と弦 CD の間には、何の関係も無いために、それを関係づけるために、 $PA \cdot PB$  と  $PC \cdot PD$  の互いの関係を A と C の唯一共通の関係である円の半径、即ち OA, OC に帰着させることを目標として考案されたと推測できる。

しかし、 $\textcircled{1}$  の両辺に  $PO^2$  を加えなくても、三平方の定理を用いて証明は可能である。

[証明]

左辺  $= PA \cdot PB$

$$\begin{aligned} &= (PE + EA) \cdot (EB - EP) \\ &= PE \cdot EB + EA \cdot EB - PE \cdot PE - EA \cdot PE \\ &= PE \cdot EB + EB \cdot EA - PE \cdot PE - EB \cdot PE \\ &= EB^2 - PE^2 \\ &= (OB^2 - OE^2) - (OP^2 - OE^2) \\ &= OB^2 - OP^2 \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= PC \cdot PD \\ &= OD^2 - OP^2 \end{aligned}$$

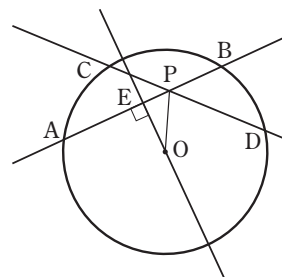
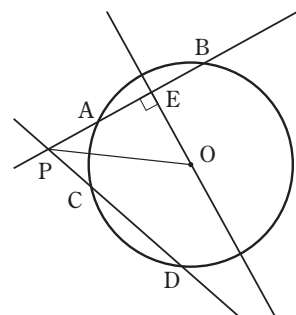
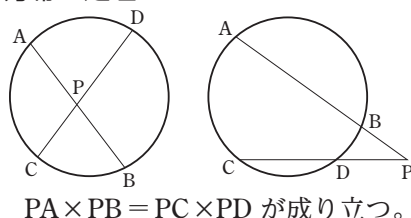
故に、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

[Q.E.D.]

この証明方法は、円 O の外部に点 P があるときにも適用できる(証明は省略)。

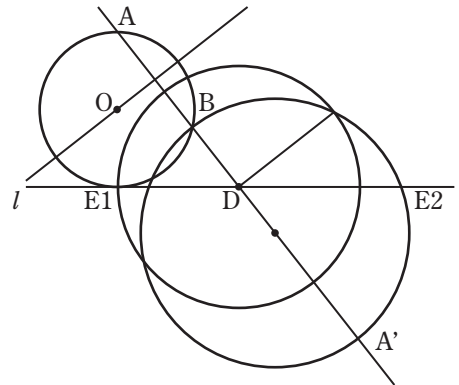
方冪の定理



以前、方冪の定理に関する大学入試問題を調べたとき、求値問題（即ち、知っているかどうかを問う問題）として出題されているに過ぎないことが分かった。しかし方冪の定理には、もっと重要な役割がある。

古代ギリシア人で数学集成 Collection を編纂した Pappus of Alexandria は、接触 Tangencies の問題を取り上げている。数学集成の中で、Pappus は Apollonius of Perga の問題「任意に与えられた 3 円に接触する円を作図せよ」を改変し、10 題の問題を提示する<sup>3)</sup>。

- (1) 任意に与えられた 3 点に接触する円を作図せよ。
- (2) 任意に与えられた 2 点と 1 直線に接触する円  
作図せよ。
- (3) 任意に与えられた 1 点と 2 直線に接触する円  
作図せよ。
- (4) 任意に与えられた 3 直線に接触する円を作図  
せよ。



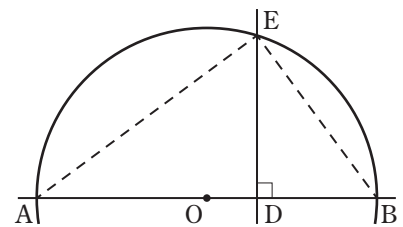
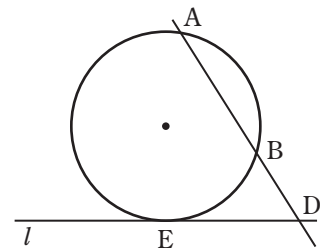
（以下、[1 円, 2 点], [1 円, 1 点, 1 直線], [1 円, 2 直線], [2 円, 1 点], [2 円, 1 直線], [3 円] と続く）

接触の課題では、(1) は、3 点が一直線上にない場合は三角形の外接円の作図に他ならない。(2) は、与えられた 2 点と 1 直線から、求める円周上に来る第 3 の点を作図することによって、(1) に帰着させることを考える（右上図）。同様に (3) は、求める円周上に来る第 2 の点を作図することによって、(2) に帰着させることを考える。即ち、数学は、命題間の関連づけを行うことによって体系化されていることを学ぶ。また Pappus は、古代ギリシアの「解析 Analysis」の考え方（現代数学でいう解析学とは異なる）、即ち、「まだ分かっていないものを、分かったものとして考察する」という考え方の習得を目的としたといわれている。

(2) の課題は、どのように達成されるのか。解析の考えでは、まだ分かっていないもの、即ち、求める円が描けたとして考察を始める（右図）。この図から方冪の定理の関係、即ち、

$$AD \cdot BD = ED^2$$

が見いだせたならば、線分 AD, BD から ED を作図すれば良いことになる。これは、比例中項の作図により実現できる（右図）。AD+BD を直径とする円 O に点 D から垂線を立て、円 O との交点を E とすると、 $AD \cdot BD = ED^2$  が成り立つ。よって、線分 AD, BD を下に右図を作図すれば、ED が得られる。これが、(2) の点 E を求める長さ DE となる。



Pappus は、方冪の定理と比例中項の作図とを結び付けることにより、Apollonius の課題を改変した 10 個の作図問題を考察させたと考えられる。比例中項の作図（これも円周角の定理の特殊な場合：直径に立つ円周角は直角）に潜む数式と方冪

の定理を表す数式とが等価であることを拠り所として、Pappus の接触の課題は、中学生にも探究の対象として位置づけることが可能となる。

Pappus の接触の課題は、問題解決の対象として少々骨は折れるが、達成感のある課題となる。Seymour A. Papert が Mindstorms の中で “Hard, but, Fun!” と記したように<sup>4)</sup>、一見解決不可能に見えるような課題を、生徒の実情に応じて、適切な示唆を与えながら問題解決させることで、生徒は、主体的に取り組んだことに対する充実感を覚えるだろうし、解決のあかつきには達成感を得ることになる。大切なことは、教師が生徒に安易にヒントを与えるのではなく、G. Polya の問題解決段階にあるように、何が問題なのか、分かっていることは何か、解決の方針はどうしたら良いかに根気よく取り組ませることにある。

#### 4. 結語

「数学的活動は、問題解決によって実現すること」を日々の授業の中で達成していくことが数学教師にとっての重要な課題である。数学の授業では、それぞれの生徒が目的意識をもって、主体的に探究に取り組めるように授業設計し、授業展開するよう、教師は個別の生徒のことをよく知らなければならないし、教材研究に努めなければならない。ある数学の命題は、証明できれば終わりではなく、一つ証明が成された時点から教材としての価値をもち始める。問題解決のためにはどのような視点があり得るのか、教材研究の段階で教師がどれだけ深く探究できるのか、問題解決の授業の成功不成功はここにかかってくる。

教師が一通りの解法しか知らなくとも、生徒が教師の意図しないアイデアに気づくことはしばしばある。ただ生徒はいつでも正解にたどり着けるように考えをまとめられるわけではない。まだ成功していないアイデアを不勉強な教師が否定したとしたら何という悲劇であろうか（かつて「先進校」での研究授業でそのような場面を目撃した）。そうならないために、教師は教材研究に努めるべきだと思う。教材研究は、教師の数学に対する教養を深めることだけでなく、生徒の未分化な発言を価値付け、学びの方向性を示すことにより価値がある。よって教材研究は、教室での目的意識をもった個々の生徒の主体的な探究活動につながる。問題解決の授業は、そのような地道な準備に支えられているのである。

#### 引用・参考文献

- 1) G. Polya(1945), 柿内賢信訳(1954), いかにして問題を解くか, 丸善出版.
- 2) 和田義信(1997), 和田義信著作・講演集 1, 東洋館出版社, pp.63–82.(初出:数学教育概論 I (1953), II (1954), 吉野書房.)
- 3) Ivor Thomas(1941), Greek Mathematical Works, Volume II: Aristarchus to Pappus, Harvard University Press.
- 4) S. A. Papert(1980), Mindstorms: Children, Computers, And Powerful Ideas, Basic Books.

(常葉大学 准教授)