

深い理解に繋がる学び：「負の数の乗法」を例として

よしい たかとし
吉井 貴寿

1. 理解の質

「理解」は、「知識」や「技能」などと並ぶ、学習成果（学力）を捉える主要な観点である。ただし、理解とは「知識（宣言的知識）や技能（手続き的知識）について正しく知ること」であるため、その役割は必ずしも並列ではない。また、ある事柄を理解できているか否かということ把握するのは、たとえ自分自身のことであっても難しい。当時は良く理解していたつもりであったが、見識を深めて後から振り返ってみると、実は良く理解できていなかったということは往々にしてある。そのため、学習者の「わかった」や「理解した」という言葉は必ずしもあてにならない。これに関連して、Skemp (1976) は理解という言葉が利用される場面を分析し、理解には質を異にする少なくとも2種類のものが存在すると指摘している。そして、それらを以下のように名付け区別している。

Relational Understanding（関係的理解）：規則と理由がともにわかっている状態

Instrumental Understanding（道具的理解）：規則は利用できるが理由がわからない状態

ここで重要なことは、「理解」がしているか否かの二分律に従うのではないことである。学び方によって、得られる理解の質は異なるし、その内容（理解の度合い）にも差異が生じる。本稿では理解をより詳細に捉え、どのような学習が理解を深めることに繋がるかを考察する。

2. 負の数の乗法

学習指導の方法によって理解の質が変化することを、今回は「負の数の乗法」を例にみていく。今回、特に焦点を当てて論じるのは、本内容の1つの大きなPointである「乗数・被乗数が共に負の場合」である。これに関しては、多数の研究も行われており、様々な学習指導方法が知られている。以下、代表的な4つの方法を取り上げ整理・考察する。

(1) 結果暗記型の学習指導

教科書には負の数の乗法を整理し、「符号の同じ（異なる）2つの数の乗法」や「負の数が奇数個（偶数個）のときの積の符号」などについて論じる箇所がある。この点を偏重した学習指導が行われた場合、「 $(-) \times (-) \rightarrow (+)$ 」といった記述を丸暗記して、これを理解したと考えることがある。このような理解でも、練習をすることで計算はできるようになる。しかし、何故そうするのかという理由はわかっていないため、これは道具的理解である。また、このような計算技能はコンピュータでも代替可能である。「最低限計算はできるように」と直近の到達目標ばかりを意識すると、子どもの未来に繋がらない指導となりかねないため注意が必要である。

(2) モデルを用いた学習指導

抽象的な数の計算をより具体的なモデルを用いて説明する方法がある。特に、東西移動モデル（東西移動速度と時間の関係から到達位置を求める）は広く用いられている代表的なモデルである。このような学習指導は広く行われているものの、大別して2つの問題点が存在する。1つは数学における整数の乗法（二項演算）とは異なるモデル（異種量間の演算）になっているという点であり、もう1つは必ずしも全ての具体的モデルで説明ができるわけではない（一般性に欠ける）という点である。特に、後者は問題となることが多い。負の数の導入場面では、気温や標高、収支やゴルフスコアなどの身近な具体例が扱われることが多いが、そういったモデルに対して乗法の意味解釈をすることは容易くない。この問題からもわかるように、東西移動モデルは負の数の乗法を説明するのに都合が良い特殊なモデルである。また、そもそも東西移動モデルが負の数の乗法に適合する根拠は明らかではない。そのため、この学習指導方法では負の数同士の積が正の数になる（数学的な）理由が示されない。負の数の乗法を暗記するのに都合が良い具体的場面を与えているに過ぎないのである。故に、こうしてなされる理解もまた道具的理解である。ただし、(1)の場合に比べれば、そう考えることが有用である適用例を知っているという点で、深い理解であると言える。

(3) 規則性の推測による学習指導

既知の乗法を整理し、そこから規則を推測することで乗法を負の数まで拡張していく方法がある。例えば、「(負の数) × (非負整数)」を学習した後に「 $(-1) \times 2 = -2$ 」, 「 $(-1) \times 1 = -1$ 」, 「 $(-1) \times 0 = 0$ 」と順に考え、「乗数が1減るたびに、積が1ずつ増えている」という規則を見出し、「 $(-1) \times (-1) = 1$ 」であると考えする方法（外挿法）がこれである（厳密には整数値以外も考察することが望ましい）。その他、「被乗数が a の場合」と「被乗数が $(-a)$ の場合」を比較し、規則を推測する方法も存在する。このような方法では、既知の数学的な規則・性質が根拠となって、負の数同士の乗法が考えられている。故に、この場合「負の数同士の積が正の数になること」に数学的な理由が存在する。よって、これは関係的理解である。

(4) 形式不易の原理に基づく学習指導

教科書では言及されることが少ないが、「形式不易の原理」に基づく学習指導の方法が存在する。この方法では、既知の加法・乗法で成り立っていた結合・分配・交換法則が成り立ち、かつ自然数を内包する全順序集合となるように数と演算を拡張する。この場合、「(負の数) × (非負整数)」は既知とすると、「 $(-1) \times 0 = 0$ 」より「 $(-1) \times (1-1) = 0$ 」, 分配法則から「 $(-1) \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$ 」とできるので「 $-1 + (-1) \times (-1) = 0$ 」が言え、両辺に1を加えることで、「 $(-1) \times (-1) = 1$ 」が示される。この場合、先に保存する性質を定めているので、「 $(-1) \times (-1) = 1$ 」の成立理由が強く意識される。故に、(3)よりも深い関係的理解が得られると考えられる。

以上、4つの方法を示したが、これらは必ずしも単独で扱われるわけではなく、複合的に用いられることも多い。また、今回言及した4つ以外にも学習指導方法は存在する。

3. 余計なことまで考えてみる

数学は無駄を嫌う学問だが、時にはその無駄が人間の理解においては有意義であったりする。例えば、命題 A とその対偶命題 A' は真偽が一致する。故に、その両方を証明することは数学において無駄なことではない。しかし、我々は必ずしも命題 A と対偶命題 A' を同時に認識しないことが知られている。故に、人間の認知を考えた場合、A と A' の両方を考察することで理解が深まることがある。また、数学において特定の内容 X を論じる際は、X の定義（必要十分条件）を明確にした上で、純粹に X のみを論じることが多い。しかし、我々が X についてより正しく知るためには、X でないものの存在まで知ることが有用である。こういった所に、整理された数学の美しさと、愚直な人間の認知のギャップ（数学教育学の必要性）が存在する。

先の例に戻り、このことをふまえて余計なことまで考えてみよう。「 (-1) に (-1) を乗ずるならば、その解は 1 となる」の結論を否定したらどうなるかを考えてみるのである（可能性として考えられる解は $\{-2, -1, 0, 2\}$ の高々 4 通りであろう）。例えば、「形式不易の原理と同様の前提のもと、 $(-1) \times (-1) = -1$ と考えるとどのような不都合が生じるのか？」といった問題が考えられる（紙数の関係から解答は省略。解答中で負の数同士の乗除法を用いないよう注意）。そして、このような考察は $(-1) \times (-1) = 1$ とすることの理由と妥当性に対する理解を深める。なお、無矛盾に定められた規則を否定したからといって、必ずしも矛盾が生じるとは限らないので注意（例えば、非ユークリッド幾何学はそうして発見された）。

このような探究は他にもいたる所で可能であり、指導の幅を広げることに繋がる。例えば、放物線の理解を深めるために、他の似て非なるグラフ $(y = \cosh x \text{ や } y = \tan^2 x \left(x < \left| \frac{\pi}{2} \right| \right))$ を考えてみると良い。是非、これらの関数のグラフを描画し、「座標が与えられていない状況で、どうすればこれらのグラフと放物線を判別できるか？」を考えてみて欲しい（ただし、提示した数式は曲線を生成するためのだけのものであり、それらの性質等に関する知識は一切必要ない）。放物線だけを考察し、放物線を学ぶというのは一見無駄のない優れた方法のように思われる。しかし、深い理解を求めるのであれば、余計なことまで考える、急がば回れの精神が大切なのである。

4. 深い理解を追い求めて

当然のことだが、余計なことまで考えていると時間が掛かる。授業時間内に全てを扱い、既存のカリキュラムをこなすのは困難かもしれない。しかし、それでも「Ⅰ：教師自身が教材研究において探究を行う」、「Ⅱ：生徒の誤答を契機として学びを深める」、「Ⅲ：発展的な探究課題として生徒が自主的に取り組む」といったいくつかの場面では十分に利用可能かと思う。特に、Ⅲは一朝一夕では実現しない。日々の授業を通して、主体的に考えたり気になったことを探究したりする態度を養う必要がある。授業時間外にも数学のことを考え、探究を行うような生徒を育てられれば、その生徒の学力は飛躍的に向上する。短い授業時間でいかに基礎的な態度や思考方法を養い、魅力的な課題や問いと出会わせてあげるかということが重要になってくる。そういった意味で、深い理解を促すためには「授業でどう指導するか？」だけでなく、「授業時間外に何をどう探究させるか？」ということまで意識すると良いであろう。

（奈良教育大学 准教授）