

二次関数の指導について ～教科専門担当教員の私見～

おおたけ ひろみ
大竹 博巳

1. $y=x^2$ のグラフを描いてください

2009年に中学校・高等学校数学教諭対象の教員免許状更新講習の講師を担当した時のことです。教科書の記述の背後にある数学について、関数を例にとり講義しました^(注1)。その講習の最初に、受講者に関数 $y=x^2$ のグラフを描いてもらったところ、中学校の先生と高校の先生とで異なるグラフの描き方をされたのを非常に興味深く感じました。中学校の先生方は x 座標が整数であるような曲線上の点を取り、 $-1 < x < 1$ の間では間隔を細かくして更に点をとって、それらを通る曲線を描きました。一方、高校の先生方は、そのような点をとることなく(もちろん、頭の中にはあるのですが)、原点で x 軸に接し、 y 軸対称で、上に開いているという特徴をもつ曲線を描きました。これは、普段の授業の進め方や二次関数に対する意識が反映した結果であろうと思います。

高等学校の数学では、二次関数は数学 I で取り上げられます。数研出版の教科書では、まず、 $y=ax^2$ のグラフについて中学校の内容を復習した後、 $y=2x^2$ と $y=2x^2+3$ のような具体的な関数の組を例に挙げ、いくつかの x に対する値を比べた表を用いて、 $y=ax^2+q$ のグラフが $y=ax^2$ のグラフを上下に平行移動したものであることを説明します。そして、 $y=a(x-p)^2$ のグラフに対して同様の説明を行い、 $y=a(x-p)^2+q$ の形まで進め、一般の二次関数 $y=ax^2+bx+c$ については平方完成を使ってグラフの形を説明しています。

一方、中学校の数学では、二次関数 $y=x^2$ について何も知識のない中学生に対する指導ですので、グラフ上の点を多くとることによってグラフを求めます。高校数学への接続を考えたとき、生徒が学ぶべき点は、このような点をとることによるグラフの描き方ではなく、描いたグラフがどのような特徴をもっているかということになるでしょう。中学校の教科書では、グラフを正確に描く必要がある所か、ある程度曖昧でも良い所かに応じて、グラフを方眼紙に描いた図と座標軸だけの図とを使い分けています。この使い分けを生徒に気付かせることも必要と思います。

(注1) 通常、関数の増減を調べるのに微分法を使いますが、多項式関数に関しては微分法を用いることなく、つまり極限操作をすることなく、増減を調べる方法があります。しかし、その方法は変数が多く、式も複雑になり、しかも多項式関数以外には適用できません。このことを知れば、微分法の便利さが前よりも実感できるようになるのではないのでしょうか。私の専門が解析学であるので、このようなことを始めとして、微分法の別の見方など教科書には書かれていない内容を講義しました。

2. 身の回りにある事象と数学

数研出版の中学校数学の教科書では、関数 $y=ax^2$ の章は斜面に沿って転がるボールの話から始め、いくつかの時点でのボールの位置を表にし、関係を見つけ出して式にします。そして、式からグラフを描くという道筋に沿って、つまり

実験 → データ(表) → 式(文字化) → グラフ(視覚化)

の流れで話を進めています。身の回りにある、中学生にも身近な事象が数学の言葉である表・式・グラフに表現できることを示すことにより実社会と数学との関連性を示し、数学を学ぶ動機付けをしています。次期学習指導要領について、「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめについて(報告)」[1]に現行指導要領の成果と課題および次期学習指導要領で目指すものがまとめられています。これを私は、数学本来の見方・考え方を身に付け、その基礎の上に数学的活動により身の回りの事象への数学の適用方法を学び、数学的な考え方の良さを知ることであると解釈しています。

身の回りの事象は多くの要因に依存しています。通常、事象を考察するためには、実験を行って主となる要因とそれらの相互関係を調べ、そこから仮説を導き出し、事象の数学モデルを得ます。そして追試験を行い、数学モデルの適切さを検証します。中学生には数学モデルを作るための手段が限られていますが、実験データを表・グラフにし、これまでに習得している知識・技能を活用して、仮説を立て、そこから導き出される予想が正しいかどうかを再実験して検証する活動であれば可能でしょう。数学の世界内での厳密さと現実世界への適用の際の大まかさを明確に区別して使い分けた指導が必要であると思います。

このことを実際に行った実践があります。柳本哲先生を研究代表者とする科研費による研究「中高生の科学的分析思考力を育てる数学モデリングチャレンジプログラムの開発実施」において、2013年に中学生に対して台車が斜面を普通に転がるときと帆を張った台車が斜面を転がるときの時間と距離の対応を調べ、数学的モデルを作る数学的モデリング・チャレンジプログラムを実施しました[2]。この実践の特徴は、前者が二次関数、後者が一次関数を近似関数とした数学的モデル化を生徒に見い出させることまでを意図していたことです。グラフ電卓、データアナライザー、距離センサーを用いて実施したのでデータの精度と処理は十分なものが用意できました。しかしながら、教科書にある理想的なデータと違って実際の測定値では関数の係数がただ一つにきれいに決まるわけではないため、参加者はこれまでの数学体験との違いを感じて、戸惑っていたようでした。しかし、この戸惑いは、数学の世界と数学の応用の世界の「作法」の違いを気付かせられれば解消されるでしょう。

このような授業実践を数学的活動として授業に取り入れる際は、それなりの準備や工夫が必要となってきます。実測データから法則を見つけ出すには特別なノウハウを必要とすることが多いので、前号の「チャート.Info」No.10の大石裕千先生の報告[3]にあるように、法則の与えられた現実事象を扱い、法則の影響を考察することに重点を置くのも数学的活動の実践として一つの良い方法であると思います。この場合、法則の変化が結果に与える影響を調べることによって学習内容を深化させることもできます。

事象を表現する関数を見つけ出すために、よく使われるのは法則を表す(偏)微分方程式でしょう。例えば、ブラウン [4] の第 1 章の 1. 5 ~ 1. 8 には微分方程式を使ってモデル化することを解説していて参考になります。他に、小林 [5] と [6] も、著者独特の味があり、興味深く読める論文です。微分方程式は、中学校数学はもちろん高校数学でも範囲外ですが、差分方程式で法則を表現して、計算はエクセルなどのソフトにさせて関数(数列)を見つける授業実践もあります。

今の時代、インターネットには玉石混合の情報が溢れています。検索して、最初のほうにくる情報が正しいとは限りません。子供たちに情報の信頼性を判定できる能力を身に付けさせることも重要で、判定には数学的な考え方が有効です。どのようなことをしたら真偽が判定できるのかを考えさせることも、数学の授業実践として意味があるのではないのでしょうか。例えば、坂を転がる台車が二次関数によりモデル化できることを主張するための機材を準備することは大変ですが、一次関数ではモデル化できないことの説明であれば、身の回りにあるものだけでできそうです。どうしたらよいかを生徒に考えさせるのは、実際に活動するかどうかは別にして、面白い試みと思います。

参考文献

- [1] 中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会 算数・数学ワーキンググループ, 算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめについて(報告), 文部科学省ホームページ, 2016 年 8 月 26 日
- [2] 柳本哲, 研究成果報告書, 科研費データベース, 2015 年 6 月 27 日
- [3] 大石裕千, 関数の指導を考える ~視覚から数学的な見方や考え方を伸ばす~, チャート .Info, 数研出版, No.10, 4-6.
- [4] M. ブラウン, (一樂重雄, 河原正治, 河原雅子, 一樂祥子訳), 微分方程式(上) その数学と応用, 丸善出版, 2012 (シュプリンガー・ジャパン株式会社より出版された同名書籍を再出版したもの)
- [5] 小林亮, 粘菌の経路探索における最適化, 日本ロボット学会誌, Vol.32, No.6, 2014, pp.530-535.
- [6] 小林亮, 生物に学ぶ自律分散制御 —粘菌からロボットへ—, 計測と制御, Vol.54, No.4, 2015, pp.236-241.

(京都教育大学 教授)