

## 小・中の学びの連続性を意識した教材開発 ～極限の考えに焦点を当てて～

坂井 武司

### 1. はじめに

現行の学習指導要領において、「円周の長さ」、「円の面積」、「円柱の体積」は小学校算数の学習内容、「角錐・円錐の体積」、「球の体積」は中学校数学の学習内容です。これらの学習内容に共通する数学的な背景は、極限の考えです。数列や関数の極限に関して、ある一定の数値に限りなく近づくことを収束するといい、その数値を極限值といいます。このような極限は高校数学の学習内容です。したがって、小学校算数や中学校数学では、極限が内在する学習内容を通して、一定の数値に収束するという極限の考えの素地を育むことが重要だと考えられます。

### 2. 小学校算数における「円の面積」の指導

小学校算数第6学年の3社の教科書では、図1に示すように「円の面積は、半径を1辺とする正方形の2倍よりも大きく、4倍よりも小さい」ということから、円の面積が導入されます。これは、図2に示す「二等辺三角形OAB<おうぎ形OAB<二等辺三角形OCD」という挟み込みの考えを用いています。その後、円を8等分、16等分、32等分、64等分し、できたおうぎ形を交互に並び替え、図3に示すように長方形(平行四边形)の面積に近似することにより、「円の面積＝半径×半径×3.14(円周率)」を導きます。ここでは、学習内容の本質に迫る「円の面積」の指導として、円に内接する正多角形と外接する正多角形の面積を求め、極限の考えに基づいて円の面積を導く教材開発を紹介します。

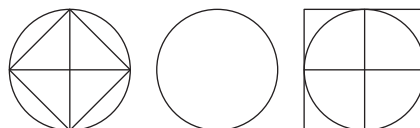


図1. 円の面積の導入方法

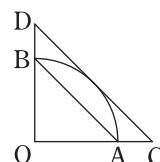


図2. 挟み込みの考え

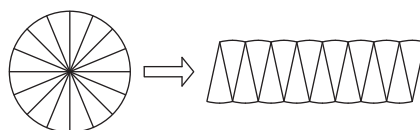


図3. 長方形(平行四辺形)への近似

### 3. 「円の面積」に関する教材開発

半径が10 cmの円の面積について考えます。そこで、図1を基に、 $10 \times 10 \times 2 \text{ (cm}^2\text{)} < \text{円の面積} < 10 \times 10 \times 4 \text{ (cm}^2\text{)}$ , つまり、 $200 \text{ cm}^2 < \text{円の面積} < 400 \text{ cm}^2$ と見当付けさせます。次に、図4を提示し、外接する正方形の1辺が、内接する正方形の1辺に平行になることを捉えさせます。さらに、図2を提示し、おうぎ形OABが二等辺三角形OABと二等辺三角形OCDによって挟まれていることを掴ませると共に、図5を提示し、おうぎ形の中心角が $90^\circ$ (円の4等分)、 $60^\circ$ (円の6等分)、 $45^\circ$ (円の8等分)の場合を基に、「中心角が小さくなると、2つの二等辺三角形の面積がおうぎ形の面積に近づいていく」ことを捉えさせます。

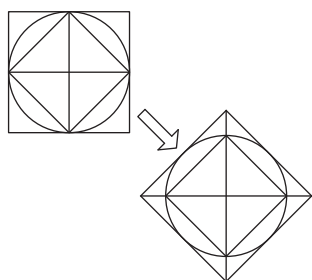


図 4. 正方形による挟み込み

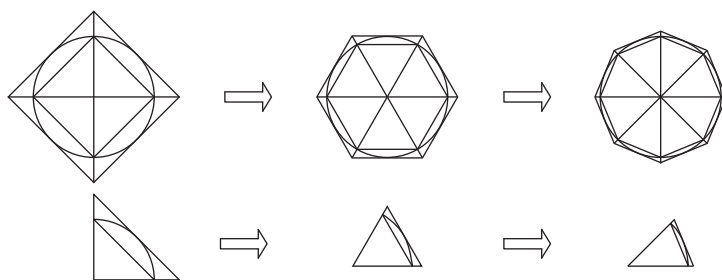


図 5. 円の 4 等分, 6 等分, 8 等分の場合

ここで、図 6 のような半径 10 cm の円を等分してできる中心角が  $60^\circ$  (円の 6 等分),  $45^\circ$  (円の 8 等分),  $30^\circ$  (円の 12 等分),  $20^\circ$  (円の 18 等分),  $10^\circ$  (円の 36 等分) の場合のおうぎ形 OAB 及びそのおうぎ形に内接する二等辺三角形 OAB と外接する二等辺三角形 OCD を作図し、高さ BE と底辺 CD を実測します。実測した高さ BE が底辺 OA (10 cm) の何倍になるか、また、実測した底辺 CD が高さ OF (10 cm) の何倍になるかを考えることにより、中心角が  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $1^\circ$  の場合に、円の面積の値が含まれる範囲を算出します。中心角が  $60^\circ$  の場合、 $10 \times 10 \times 2.58 \text{ (cm}^2\text{)} < \text{円の面積} < 10 \times 10 \times 3.45 \text{ (cm}^2\text{)}$  となります。中心角が  $5^\circ$  (円の 72 等分),  $1^\circ$  (円の 360 等分) の場合は作図及び実測が困難であるため、教師が提示します。図 7 のように、算出した内接する正多角形の面積と外接する正多角形の面積の変化の様子をグラフに表し、面積が徐々に  $314 \text{ cm}^2$  に収束することを視覚的に捉えさせ、「円の面積 = 半径  $\times$  半径  $\times 3.14$  (円周率)」を導きます。

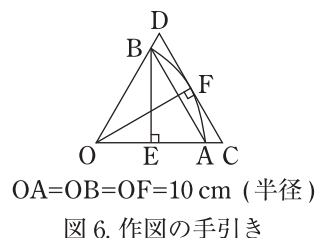


図 6. 作図の手引き

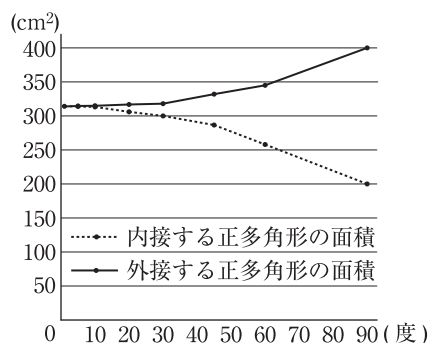


図 7. 内接する正多角形の面積と外接する正多角形の面積の収束

#### 4. 中学校数学における「角錐・円錐の体積」

中学校第 1 学年の 7 社の教科書では、底面が合同で高さが等しい角柱と角錐の容器あるいは円柱と円錐の容器に水を入れ、その量を比べることにより、角錐や円錐の体積は、底面が合同で高さが等しい角柱や円柱の体積の  $\frac{1}{3}$  になることを確認します。このことから、底面積が  $S$ 、高さが  $h$  の角錐や円錐の体積を  $V$  とし、「 $V = \frac{1}{3}Sh$ 」という式が導かれます。また、図 8 のように、底面が正方形で高さが正方形の 1 辺の長さに等しい四角錐を 3 個組み合わせると立方体ができることを基に、四角錐の体積は、底面が合

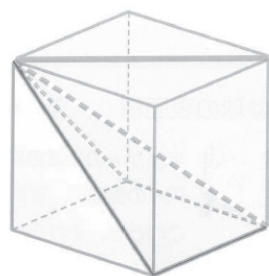


図 8. 角柱と角錐の体積の関係 (数研出版, 中学校数学 1, p.183)

同で高さが等しい四角柱の体積の  $\frac{1}{3}$  になることを示している教科書もあります。ここでは、これらと別の方法として、小・中の学びの連続性の観点から、極限の考えに基づいて四角錐の体積を導く教材開発を紹介します。

## 5. 「角錐・円錐の体積」に関する教材開発

図9のような底面が1辺10 cmの正方形であり、高さが10 cmの正四角錐の体積について考えます。まず、区分求積法に基づいた図10、図11を提示します。高さを10等分し、高さに垂直な平面で正四角錐を切り取った切り口の正方形を底面とする正四角柱を積み上げた「正四角柱階段」の体積を求めます。このとき、正四角錐に内接する正四角柱階段と外接する正四角柱階段により、正四角錐が挟み込まれることを掴ませます。また、今回の場合、正四角柱階段において、1段上がるごとに、等分してできた長さだけ正方形の1辺の長さが短くなること、正四角錐に外接する正四角柱階段から最下段を引くと、内接する正四角柱階段になることを捉えさせておきます。高さを10等分した場合、外接する正四角柱階段における1段ずつの体積は、下から、 $100\text{ cm}^3$  ( $10 \times 10 \times 1 = 100$ ),  $81\text{ cm}^3$  ( $9 \times 9 \times 1 = 81$ ),  $64\text{ cm}^3$  ( $8 \times 8 \times 1 = 64$ ),  $49\text{ cm}^3$  ( $7 \times 7 \times 1 = 49$ ),  $36\text{ cm}^3$  ( $6 \times 6 \times 1 = 36$ ),  $25\text{ cm}^3$  ( $5 \times 5 \times 1 = 25$ ),  $16\text{ cm}^3$  ( $4 \times 4 \times 1 = 16$ ),  $9\text{ cm}^3$  ( $3 \times 3 \times 1 = 9$ ),  $4\text{ cm}^3$  ( $2 \times 2 \times 1 = 4$ ),  $1\text{ cm}^3$  ( $1 \times 1 \times 1 = 1$ ) であり、合計は  $385\text{ cm}^3$  となります。内接する正四角柱階段の体積は、外接する正四角柱階段から最下段を引いた体積になるので、 $285\text{ cm}^3$  となります。したがって、高さを10等分した場合の正四角錐の体積の値が含まれる範囲は、 $285\text{ cm}^3 < \text{正四角錐の体積} < 385\text{ cm}^3$  です。正四角柱階段の体積が、底面が1辺10 cmの正方形、高さが10 cmの正四角柱の何倍になるかを考えると、 $10 \times 10 \times 10 \times 0.285\text{ (cm}^3\text{)} < \text{正四角錐の体積} < 10 \times 10 \times 10 \times 0.385\text{ (cm}^3\text{)}$  と表せます。同様に、高さを20等分した場合の正四角錐の体積の値が含まれる範囲を算出すると、 $10 \times 10 \times 10 \times 0.309\text{ (cm}^3\text{)} < \text{正四角錐の体積} < 10 \times 10 \times 10 \times 0.359\text{ (cm}^3\text{)}$  となります。50等分、100等分、200等分、300等分の場合については、Excel等の表計算ソフトを用いるとよいでしょう。以下に、50等分、100等分、200等分、300等分の場合に、正四角錐の体積の値が含まれる範囲を示します。

50等分： $10 \times 10 \times 10 \times 0.323 < \text{正四角錐の体積} < 10 \times 10 \times 10 \times 0.343$

100等分： $10 \times 10 \times 10 \times 0.328 < \text{正四角錐の体積} < 10 \times 10 \times 10 \times 0.338$

200等分： $10 \times 10 \times 10 \times 0.331 < \text{正四角錐の体積} < 10 \times 10 \times 10 \times 0.336$

300等分： $10 \times 10 \times 10 \times 0.332 < \text{正四角錐の体積} < 10 \times 10 \times 10 \times 0.335$

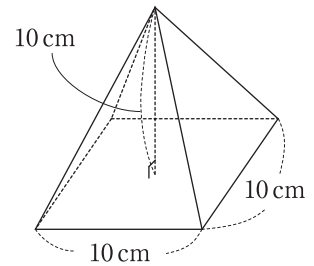


図9. 正四角錐

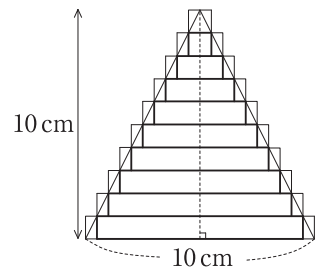


図10. 区分求積法

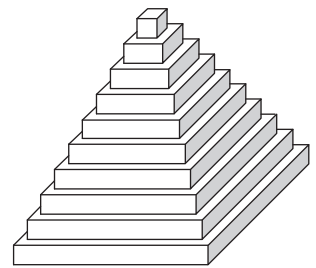


図11. 正四角柱階段による近似

図 12 のように、内接する正四角柱階段の体積と外接する正四角柱階段の体積の変化の様子をグラフに表し、体積が徐々に  $333 \text{ cm}^3$  に収束することを視覚的に捉えさせます。正四角錐の体積は、底面が合同で高さが等しい正四角柱の体積  $1000 \text{ cm}^3$  ( $10 \times 10 \times 10 = 1000$ ) の  $0.333$  倍、つまり  $\frac{1}{3}$  になっていることから、底面積が  $S$ 、高さが  $h$  の正四角錐の体積を  $V$  とし、「 $V = \frac{1}{3}Sh$ 」という式を導きます。

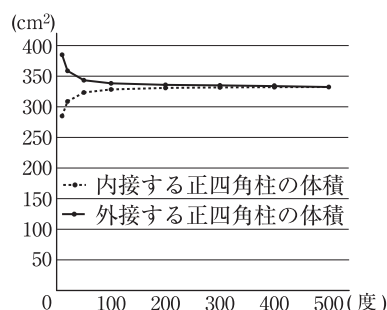


図 12. 内接する正四角柱階段の体積と外接する正四角柱階段の体積の収束

円錐の場合は、図 10 を基に、図 13 のような回転体としての円柱階段を考え、正四角錐の場合と同様の方法により、底面積が  $S$ 、高さが  $h$  の円錐の体積を  $V$  とし、「 $V = \frac{1}{3}Sh$ 」という式を導くことができます。この場合、底面の半径が  $10 \text{ cm}$  であり、高さが  $10 \text{ cm}$  の円錐の体積について考えます。また、四角柱の体積の  $\frac{1}{3}$  が四角錐の体積となること、四角柱は三角柱を合わせた立体であることから、三角柱の体積の  $\frac{1}{3}$  が三角錐の体積になることを導きます。同様に、図 14 のように、正角柱は三角柱を合わせた立体であることから、正角柱の体積の  $\frac{1}{3}$  が正角錐の体積になることを導きます。最後に、図 5 を基に、正角柱の底面に関して、正多角形の角の数が大きくなると、正多角形の面積が円の面積に近づいていくことから、円柱の体積の  $\frac{1}{3}$  が円錐の体積になることを導くことができます。

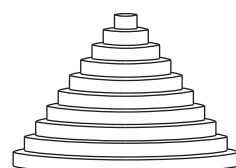


図 13. 円柱階段

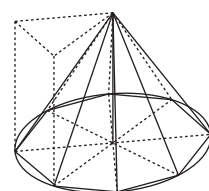


図 14. 三角錐と正角錐

## 6. おわりに

中学校数学において、極限の考えにふれることができるのは、上述の内容と大数の法則に基づいた経験的確率に関する内容です。数少ないチャンスを生かすと共に、他の教材についても、小・中の学びの連続性の観点から、学習内容の本質に迫る教材開発が大切であると考えられます。

## 参考文献

廣瀬隆司, 坂井武司, 石内久治, 齋藤昇 (2013): 「極限の考えを導入した円の面積の授業実践とその効果」, 『数学教育学会誌』, 数学教育学会, Vol.53, No1・2, pp.51-60.

(鳴門教育大学 准教授)

# 高校数学を見据えた中学校数学の指導

竺沙 敏彦

## 1. はじめに

日本の場合、多くの生徒が義務教育を終えた後も数学を学習する。にもかかわらず、中学校で教える教員の側では、今教えようとしている内容がこの先どのような内容につながっていくのか、強く意識できていないのではないだろうか。

本稿では、中高一貫校に勤務した経験をもとに、中高のつながりや違いについて中学校段階で教師が意識しておきたいことを取り上げる。先生方の教材研究に少しでも役立つことを願っている。

## 2. 中高のつながり

まずは、中高のつながりについて具体的事例を挙げてみたい。

### (1) グラフの意味するところ

$y=3x$  のグラフをかくときに、どのように教えるか。例えば、 $(0, 0)$  と  $(1, 3)$  の2点を座標平面上にとって、「あとはそれを『直線』で結ぶ」とだけ教えてしまうのは疑問である。反比例や2次関数ではどう考えればよいのか。

私は、1次関数のグラフをあえて上記のように指導したあとで、2次関数のグラフをかかせることがある。そうすると生徒の何人かは、点をとったあとに同じように直線(線分)で結ぼうとする。折れ線グラフにしてしまう生徒もいる。実は、多くの生徒は2次関数のときにはさすがに直線(線分)で結ぶのはまずいと感じているのだが、どうしていいかわからないのだ。

授業では、そういった「ゆさぶり」を通して深い理解につなげようとしている。つまり、「グラフが直線になることや曲線になること」を機械的に教えるのではなく、「条件を満たす点を無数に集めると、最終的に点の集まりが直線や曲線になる」ということを強調して教え、なんとなくでも生徒の意識に残しておくことが大切である。こうした準備が、以後の学習にもよい影響を与える。

例えば、 $y=x+2$  のグラフをかくだけであれば、 $y$  切片が2、傾きが1だとわかればいいのかもしれないが、領域問題まで視野に入れると、その直線が  $y=x+2$  を満たす点の集まりであると認識できるかどうかのポイントになる。

$y>x+2$  の領域を表すことは、 $y=x+2$  のグラフをかくことよりも難しいとされている。しかし、 $y=x+2$  を、条件を満たす点  $(x, y)$  の集まりとしての直線であると認識していれば、中学生であっても  $y>x+2$  の領域を理解することは困難ではない。点  $(3, 6)$  がこの不等式の領域に含まれることは、 $6>3+2$  という関係から容易に理解できるのである。

中学2年の教科書に載っている「連立方程式の解をグラフを用いて求める」問題にどのような価値があるのか疑問に思った方も多いと思うが、グラフが点の集まりであることを意識させるためには、これもかなり利用価値のある問題であろう。

## (2) 平方完成

2次方程式の解の公式の扱いが軽くなったときの衝撃ほどではないとしても、中学3年で登場する平方完成については、扱いが小さくなっていることが気になる。先生方によっては、平方完成はとばして解の公式を丸暗記しようとしている場合もある。そのことの是非はともかく、平方完成についても中学校段階でしっかりと練習しておくことは必要である。なぜなら、高等学校の教科書においては、平方完成は既知の内容で、習得済みであることが前提になった記述になっているからである。

## (3) 論証

中学校の「証明」問題は、イコール図形の論証であると思いがちだが、例えば、「偶数と奇数の和は奇数になることを説明しなさい」も歴とした証明問題である。

論証を初めて学習する生徒に体系的に教えるために、定義や仮定がはっきり示しやすい図形を題材としているだけで、前述のような代数的な証明問題も「証明」問題としてもっと意識的に扱っておく必要がある。

## (4) 空間図形の認知

中学校段階での空間図形についての指導をもっと手厚くするべきではないかと考える。現状では生徒の空間認知を充分育てられていない。例えば、回転体の体積を求める問題において、平面図形を回転させたときの回転体のイメージがわからない生徒が増えてきていると感じる。イメージできなければ解くことは困難である。これは、高等学校で積分を用いて回転体の体積を求める際などに問題になってくる。中学校段階では空間図形の学習内容は少ないが、空間認知の育成のために丁寧に指導をしておきたい。

## (5) 中高連携と小中連携

中学校で教えていると、ややもすると「小学校の先生は……」と考えがちであるが、高等学校と中学校の関係も同じで、「中学校の先生は……」となることがある。

小学生のときにこういうことを身につけてほしいと考えるのは中学校教員にとって自然であり、大切なことである。同じように、高等学校から見たときに中学校段階で身につけてほしいことは何かを考えていくことが中高連携の第一歩である。

# 3. 中高の違い

中学校と高等学校でつながりがあるように、異なる部分もある。次に、中学校と高等学校の違いについて考えていく。

## (1) 結果か過程か

数学の問題解決において何が大切であるのか。中学校では正解を求めることがより優先されているように感じる。一方、高等学校では正解に至る過程がより重要視される(当然、正解に辿り着くことも重要である)。正解だけが示されてもあまり評価されないこともある。不正解

であっても、解決に至る考え方が正しければある規準で評価される。

回り道かもしれないが中学校の段階でも問題解決に至る考え方を大切にする指導は重要である。具体的には、文章題解決等において、途中式や解決過程の説明をしっかりと書く練習をすることが有効である。

## (2) 定義域の扱い

問題を解く際に、定義域の扱いについては中高で大きく異なる。

中学校では、問題を解く過程の最終段階で定義域を考え、処理することが多い。ところが、高等学校では、問題を解く過程の最初に定義域を論じる。例えば、「直角三角形において、直角をはさむ2辺の長さの和が14 cmである。このような直角三角形の面積の最大値を求めよ。」という問題の定義域  $0 < x < 14$  について、中学校では  $x=7$  を求めた後に、定義域を考えて答えるが、高等学校では  $0 < x < 14$  を最初に論じることが欠かせない。この定義域の範囲で式変形ができると考えるから、 $\frac{x(14-x)}{2}$  とする前に定義域を明示しなければならない。

この違いは、中高の数学の厳密さの違いからきている。中学校で定義域を最初に扱うべきであるといっているのではなく、発達段階に応じて求められる厳密さは変化していくから、そのことを意識しながら指導を行っておくことが大切である。

## (3) より抽象化された問題

小学校の算数には身近な問題があふれている。中学校においても特に文章題解決はまだまだ現実に即した問題が多い。つまり、答えを求めたときにそれを現実と照らし合わせることによって確かめたり納得できたりする。しかし、高等学校では多くの問題が数学の世界の問題となり、現実感を感じなくなる。何でもかんでも現実と照らし合わせるのではなく、純粋に数学の世界の中で理解する習慣を中学校の段階から始めたいものである。

## 4. まとめ

本校は中高一貫教育校であり、6年一貫のシラバスがあるため、中学校段階の教育内容が高等学校段階の学習内容にどのようにつながっているかを常に意識しやすい状況にある。しかし、一貫校でなくても高校での学習内容を知ること自体は容易である。それを知った上で一度これまでの指導を見直してみるとよいだろう。まずは、高等学校の教科書を開いてみてはいかがであらう。

(京都府立洛北高等学校附属中学校)

# 数学教育と人材育成 ～次代を担う数学教師たちへの願い～

柳井 崇史

## 1. 教職大学院での学び

数学教師になって30年、現場一筋ですごしてきた。平成23年からは、「学力向上推進教員（秋田県教育専門監の山口県版）」になり、4校を兼務して若い先生の授業づくりに協力させてもらってきた。自分で授業できないもどかしさを感じながらも、「次代の先生に自分が学んできた先輩方の数学教育をつなぐ」という使命に燃えて活動してきた。

ところが、この4月からは、兵庫教育大学教職大学院の学校経営コースに派遣され、再び大学院生として学校経営を学ぶことになった。このような経緯で、「自分の所属校」「自分の担当する生徒たち」との距離が離れていった。悲しい現実だが、そのかわり、「多くの人との出会い」「多くの情報との出会い」が自分の財産となった。授業のない私がこの原稿を書いているのも、学力向上推進教員時代に大変お世話になった数研出版さんとの人のつながりからである。

## 2. 人材育成の必要性

兵庫教育大学の教職大学院には、北は北海道から、南は鹿児島県までの現職教員が入学している。共通履修科目の講義では、授業実践開発コースや生徒指導開発コースなどの教員とも顔見知りになり、他県の多くの教育情報に触れることができる。これは、1つの県で在職しているだけでは分からない強みである。その中で、地方の県では教員の大量退職時代を迎えることが喫緊の課題となっていることが分かってきた。我が山口県では、今後10年間で約半数の教員が退職を迎えることが分かっている。これにより、考えられる各キャリアステージごとの課題は3つある。

まず、一番危惧されていることは、若手教師が多くなることによる授業の質の問題である。これに対し、各県とも研修を中心とした施策を展開し、教師の力量の向上を図っている。県によっては、大学や大学院の養成段階での研修を県教委と大学が連携している県もある。

2つ目は、退職を前にしてモチベーションが低下しているベテラン層がでることである。本誌を読まれているベテラン層の先生方にはあてはまらないが、一度「数学教育という山」を登ってしまい、ほっとしている方は、柔軟性に欠け、新しい流れに対応しづらいという欠点がある。これを打破するには、「もう一度別の山を登る」という考え方と、「若手に自分のたどった道を教える（ゆっくりと山を下る）」という2つの方法がある。山の頂上にとどまって動かないことがまずいのである。

3つ目は、ミドルと呼ばれている中堅層の不足である。これは、数年後に学校管理職になればならない人材であり、主任などの経験のない管理職が生まれる可能性さえも考えられる。この年代層の方は、数学教育の山登りの途中でもう一つの「学校運営・学校経営」という

高い山を課されることになり、数学教育の熟練が図れなかったり、次代へのうまい橋渡しができなかったりする可能性が考えられる。

これらの「危機感」を数学教師がもつことが今は必要であり、「危機感の共有」から改善のための次の動きを考えなければならないのである。

### 3. 刃を研ぐ

とはいえ、自分もそうであったように、既存の研修は「やらされ感」があり、なかなか身につかないのが実情である。研修中は、その気になっているのだが、継続できない弱い自分が多い。研修の次の日には、生徒指導や部活動などが容赦なく待っているのである。

また、ある会議で、若い先生が「優れた先生を呼んで、よい授業がみてみたい」という発言があった。若手の本心であり、アイデアとしてよいと思うが、あえて批判的にとらえるならば、「だれが優れた先生と判断するのか」「よい授業とは何か」と問いたい。本来であれば、自分の未熟な授業を公開し、多くの意見から「自分の参考となる指導」を吸収したり、頼み込んで授業を見せてもらい、「自分の理想となる授業像」を構築したりするのが本物ではなかろうか。

ある学校では、スティーブン・R・コビー博士の『7つの習慣』を生徒の生活指導に取り入れ、成功している。その習慣とは、「自ら選択すること」や「終わりを考えてから始めること」であり、生徒だけでなく今の若い先生方に取り入れてもらいたい習慣でもある。特に数学教師として一番大切にしてほしいのが「刃を研ぐ」という習慣である。自らが数学教師として授業の力量を上げるためには、刃を研ぐ習慣を身につけなければならない。

ここで、「刃を研ぐ」ひとつの例として、山口市で行っている自主勉強会を紹介したい。山口市内の先生方を中心にして、毎月数学の自主勉強会を行っており、120回以上継続している。養成系の大学生が参加したり、研究発表の予行練習をしたり、大学の先生をお呼びしたりと元気のある勉強会である。興味のある方は、ぜひ一度ブログをご覧ください。（「山口数学教育勉強会」<http://profile.ameba.jp/tokinorijuku/>）

このような勉強会の組織は、「若手のベテランが若手を人材育成する」という、横浜市教育委員会が提唱している「メンターチーム」の理論と同じであり、理に適っている。ミドル層が主導権を握り、会を主宰することでマネジメントの能力を高め、若手は言いやすい雰囲気の中で、自らの課題を吐き出して解決していく。そして、ベテラン層はオブザーバーとして、自らの体験を語ったり、意見したりすることで、ゆっくりと数学教育の山を下りていく場なのである。このような数学教育に特化した「メンターチーム」が全国各地にできればよいと望んでいる。

### 4. 教材論の講義より

あまりにも数学離れして申し訳ないので、最後に「教材」の話をしたいと思う。大学院では自分の刃を研ぐ意味で数学教材論の講義を聴講させていただいている。自分が数学教師であることを確認できる唯一の場である。この講義では、『問題解決への数学』（Steven G. Krantz 著）の問題の一部を当番制で発表している。大学の教養程度の内容であるが、問題解決のための数学的手法がまとめてある。担当の先生は、「自分で解決すること」「数学的思考の体験をすること」の意図をもって講義されている。次は、自分が授業化したい課題である。

【挑戦問題】平面 5 枚で 3 次元の空間を分割してできる領域の最大個数はいくつか？

問題の領域とは平面で区切られた空間で、閉じていてもいなくても 1 と数える。ちなみに、2 枚の平面で分割される最大空間数は 4、3 枚の平面では 8 である。3 枚までは、なんとか「空間イメージ」が可能だが、5 枚になると手出しができなくなる。そこで、数学的な解決方法が必要となる。表にまとめたのが右表である。3 平面までは前数の 2 倍なので、4 平面は「16」と考えたいところであるが、残念ながら正解は「15」である。

|     |   |   |   |   |   |   |     |
|-----|---|---|---|---|---|---|-----|
| 平面数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| 領域数 | 1 | 2 | 4 | 8 | ? | ? | ... |

では、なぜ 15 になるのかを考えるために、「次元を下げて」考えてみる。

右の上表が「1 直線を点で分割したときの領域数」、下表が「1 平面を直線で分割したときの領域数」である。

|     |   |   |   |   |   |   |     |
|-----|---|---|---|---|---|---|-----|
| 点の数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
| 領域数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |

この次元の行き来が、1 年生でも大切なところであり、表にすることで、それぞれの表の「規則を発見する」こともできる。上表からは、「領域数＝点の数＋1」という式が見つかるであろう。また、なぜその式が成立するかを説明することも楽しそうな学習である。下表は、「領域数＝直線数＋その直前の領域数」という規則が見つかり生徒の自信になると思う。さらに、「なぜそうなるか」を追究できる生徒は、大いに褒めて認めてあげたい。

|     |   |   |   |   |    |   |     |
|-----|---|---|---|---|----|---|-----|
| 直線数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5 | ... |
| 領域数 | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | ? | ... |

実際には、「領域数＝直前の領域数＋『次元を一つ下げた直前の領域数』」となる。4 平面の場合は、3 平面でできた領域に 1 平面を加えることで、新たに 7 つの領域が増えると考ええる。この考え方に気付けば、5 平面による領域の数は 26 と計算で求められる。

もちろん、このままでは授業にならない。生徒の実態に合わせて、どこを中心課題にするかは教師の力量である。しかし、次元の行き来をしたり、発見を楽しんだり、説明方法が複数あるので、教材としての価値は高いと思う。自分なら、最終の課題は数学レポートとして提出させ、数学大好き人間も育成したい。

## 5. おわりに

思いつくままに数学教育について書き、実際の授業に基づく実践を提供できていないことをご容赦いただきたい。ここまでお読みいただいたことに感謝し、最後に自分が蓄積してきた「指導案」「指導技術のとらえ方」「役に立った教材」などをまとめたホームページ「先生のための数学通信」を紹介して終わりにしたいと思う。そこには、自分が考えた「なぜ数学を勉強するのか」の回答を込めて作ったつもりである。若い先生方の数学教師としての「刃を研ぐ」ための一助となれば幸いである。

「先生のための数学通信」(<http://suugakutuushin.web.fc2.com/>)

(山口県下関市立日新中学校：兵庫教育大学教職大学院在籍)

# 生徒の思考力・判断力・表現力を高める数学的活動

石黒 友一

## 1. はじめに

平成 24 年度から新学習指導要領が全面実施され、基礎的・基本的な知識や技能の習得とともに思考力・判断力・表現力の育成が重視されることとなった。しかしながら、生徒の現状をみると、思考力・判断力・表現力を問う授業に対するとまどいが多い。数学の授業に意欲を高めなかったり、尻込みをしてしまったりしている。例えば、公式や規則に当てはめて計算をし、答えを出すことには比較的抵抗は少ない。しかしながら、なぜその計算方法は正しいといえるのか、なぜこの公式が成り立つのかといったプロセスや定理を説明することが苦手である。また、プロセスや定理を説明することへの重要性の認識も低いと感じられる。実際、全国学力・学習状況調査の結果をしてみると、「数学B」においては、数と式、図形、関数、資料の活用とすべての分野において、数学的に事象を解釈し、数学的に説明することに課題があると指摘がされている。

## 2. 思考力・判断力・表現力を高める授業

生徒たちに思考力・判断力・表現力を身につけさせるような授業とはどのようなものだろうか。思考力・判断力・表現力を身につけさせるためのツールである言語活動を充実させる点からその授業実践例をあげたい。

授業実践した内容は、中学 2 年生の図形領域、平行線と面積である。指導内容は、「平行線や角の性質を理解し、それに基づいて図形の性質を確かめ説明すること（学習指導要領 第 2 学年 2-B-(1)-ア）」、育成を目指す能力は、「平行線の性質を用いて、面積が等しい三角形を見つけ、多角形の面積を変えずに形を変える方法を説明できる力」とした。

課題は、図 1 の四角形 ABCD において、「対角線 BD を利用して、四角形 ABCD と面積の等しい三角形をかきなさい。またなぜそうなるのかを自分の言葉で説明しなさい」である。この課題では、まず既習の知識を用いて、四角形 ABCD と面積の等しい三角形を作図させる。そして、なぜ 2 つの図形の面積が等しいと言えるのか、その理由を説明させる。この活動を通して、例えば、五角形や六角形のような多角形も面積を変えずに形を変えられるような活用力を身につけさせたい。

(次に本時の学習指導案を示す)

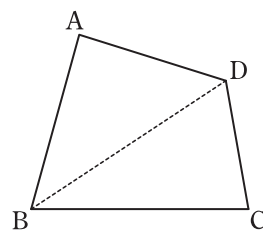


図 1

## 【学習指導案】

○本時における「言語活動の充実」をはかる取り組み（教師としての本時の課題）

多角形の面積を変えずにいろいろな形にする方法を個人で考え、その後グループで検討し、グループの考えとしてまとめ、発表する活動を通して、数学的な表現を用いて、根拠を明らかにして筋道たてて説明しあう学習を行わせる。

○本時の展開 アンダーラインを引いたところが「言語活動」に関わる取り組み

| 評価規準                                        | 学習活動                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 留意事項                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                             | 今日の授業の目標を知る。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                   |
|                                             | <p>本時の目標</p> <p>平行線の性質を用いて、多角形の面積を変えずにいろいろな形に変える方法を説明できる。</p>                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                   |
| 面積を変えずに多角形の形を変えられることを、平行線の性質を用いて説明することができる。 | <p>① 問いを解く。<br/>「対角線 BD を利用して、四角形 ABCD と面積の等しい三角形をかきなさい。またなぜそうなるのかを説明しなさい。」</p> <p>② 自分の考えをグループ内で<u>説明し合う</u>。</p> <p>③ 友達の考えを記入する。</p> <p>④ グループの考えをまとめる。</p> <p>⑤ 代表生徒がグループの考えを<u>発表する</u>。</p> <p>⑥ 問いを解く。<br/>「2つの土地の面積を変えずに、点 P を通る直線で境界線を引きなおしなさい。またなぜそうなるのかを説明しなさい。」</p> <p>⑦ ペアで自分の考えを<u>説明し合う</u>。</p> <p>⑧ 振り返りを<u>記入する</u>。</p> | <p>・ 四角形 ABCD と面積の等しい三角形のかき方、なぜそうなるのかを<u>個人</u>で考えさせる。</p> <p>・ 自分の考えを<u>グループ</u>内で説明させる。</p> <p>・ <u>全体</u>で共有させる。</p> <p>・ <u>個人</u>で考えさせる。</p> <p>・ <u>共有</u>させる。</p> <p>・ 授業で分かったことや平行線と面積の定理の良さについて書かせる。</p> |

授業の具体的な流れは、①授業の目標（課題）の把握、②個人検討、③グループ検討、④全体共有、⑤確認した考えを活用する、⑥個人の振り返りという展開である。

まず、この授業の目標（課題）が何であるか、どういう力を身につければ良いのかという見通しを子どもたちに持たせる。次に、与えられた課題に個人で取り組み、どのように作図ができるのか、作図できる根拠となる事柄は何なのかを一人ひとりに考えさせる時間を設ける。そして、個人の考えをグループ、全体場で発表し合い他者の考えを聞くなかで、作図の方法や根拠となる事柄について確認し、知識の練り上げをしていく。さらに、類題を解くことで、練り上げられた知識が本当に身についたのかを確認する。最後に、この授業で分かったこと、平行線と面積の定理の良さについて振り返りをさせ、授業のまとめをさせる。

実際の授業では、生徒によって補助線の引き方が異なり、複数の作図パターンが出てきたので、1つの課題に対する多角的な見方を生徒に感じさせることができた。また、自分の考えを伝え、共有する活動を通して、はじめは自分自身だけしか分からない表現から、他者にも伝わる数学的な表現に変化をしていく過程も見えてとることができた。

### 3. おわりに

現在、学校の授業には単に知識を身につけさせるだけではなく、既習の知識を活用して、思考力・判断力・表現力を育むことが求められている。そしてこの思考力・判断力・表現力は計画的、継続的な授業実践を通して徐々に育まれていくものである。授業を通して子どもたちにどういう力をつけるか。教師自身がその目標をきちんと見据えて単元や学年という長期的な視点で授業を構築していかなければならないと私は考える。

また、教室にはさまざまな性格の子ども、理解度の違う子どもがいる。この状況は、いわば「社会の縮図」といえる。そういった状況下で、まわりの人に自分の考えをどう説明するのか。まわりの人と協力して既習の知識をどう練り上げていくのか。といった「社会性」も思考力・判断力・表現力を育むためには必要なものである。これからもその視点を持ち日々の授業実践を行っていきたい。

### 参考文献

文部科学省(2008),『中学校学習指導要領解説, 数学編』  
国立教育政策研究所, 全国学力・学習状況調査結果資料

(神奈川県綾瀬市立城山中学校)

# かんたん！ StudyaidDB



## 第5回 明日から使える！

### 忙しい人のための プレゼンテーション入門

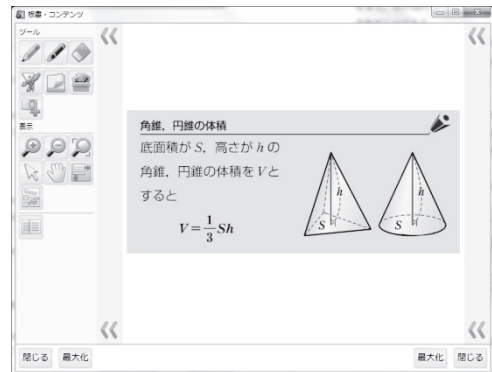
「数学はプレゼンテーションに向かないし……」  
「うちには電子黒板がないから無理かな……」  
いえいえ、そんなことはありません。

#### 映し出すだけでも意味がある

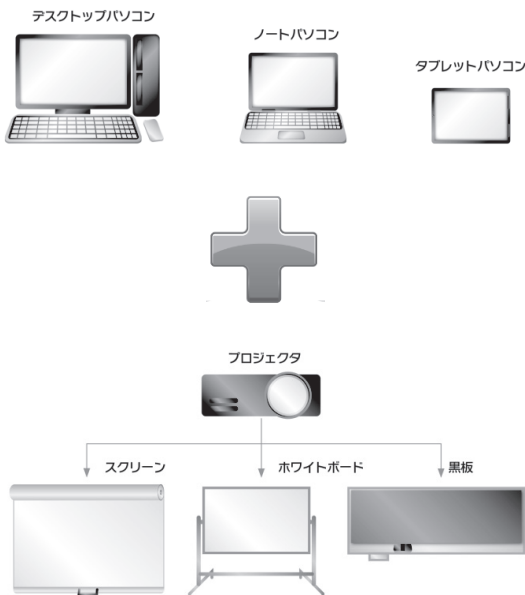
黒板を主体とした授業に加えて、教科書の紙面を見せるだけでも十分にメリットがあります。

たとえば、説明に使う図を表示すると、板書の時間がカットできます。また、授業のメインとなる公式を、書き残しておきたいときなどにも有効です。

授業のすべてをデジタルで行う必要はありません。黒板の隣に添えるだけでも効果があります。



黒板に書き写すのが面倒な問題も、映し出すだけなら……



#### 電子黒板がなくても OK

「映し出すだけとはいえ、電子黒板がないから……」そう思われる方も少なくないかもしれませんが、パソコンとプロジェクター（& 投影する場所）があれば使うことができます。

スクリーンは、大きく表示させることができるのが最大のメリットです。

ホワイトボードは、黒板に比べると、投影したものが見やすく、また、ホワイトボードマーカーを使って書き込むこともできます。

黒板に投影すれば、普段の授業の延長として利用できます。



## 進度に合わせて書籍をチェンジ

「指導用デジタル教科書 中学校数学」シリーズには、弊社発行の教科書「中学校数学」はもちろん、準拠ワーク3種類すべてを収録しています(※)。

ワーク紙面を表示すれば、教科書では扱っていないタイプの問題や発展的な内容の問題に取り組むといったことがペーパーレスで行えます。

(※) 紙面データをご利用いただくには、アップデート版データの適用が必要です。

アップデート版データは、弊社ホームページよりダウンロードしてご利用いただけます。

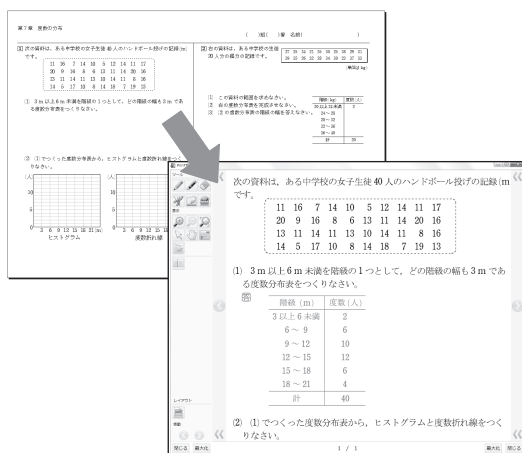
<http://www.chart.co.jp/stdb/sugaku/download>

*Studyaid* **DB** なら……

## 自作の教材も大きく表示！

プレゼンテーションシステムでは、プリント作成システムで作成した PrinT ファイルはもちろんのこと、Word、一太郎などのファイルも表示することができます。教科書の紙面と同じように、拡大したりペンで書き込んだりといった Studyaid D.B. の機能がお使いいただけます。

特に PrinT ファイルについては、一問ずつ表示したり、解説だけを表示したりと、様々な見せ方を簡単に行うことができます(くわしい手順は『取扱説明書 プレゼンテーション編』P20へ)。



PrinT ファイルを大きく表示可能



## アップデート版システムのご案内

数研出版 指導用ソフト教材

検索



最新版のアップデート版システムは、弊社ホームページよりダウンロードしてご利用いただけます。アップデート版システムでは、今回ご紹介した内容以外にも、不具合の修正や機能改良を行っています。詳しくはダウンロードページ内の【更新履歴を見る】でご確認ください。

<http://www.chart.co.jp/stdb/sugaku/download/1348.php>

## 原稿の募集について

本誌は、数学教育に携わる先生方への情報提供または先生方どうしの情報交換の場となることをねらいとした小冊子です。

以下の要領で、皆様からの原稿を広く募集しております。

### ① 募集原稿の内容

原稿はオリジナルかつ未発表のものに限ります。

数学教育に関する内容であれば、テーマの選択は自由です。

### ② 執筆要領

(1) Word 用のひな形を、弊社ホームページよりダウンロードしていただけます。

(2) 原則、1 人の方に 3 ページを配当いたします。

1 ページ目はタイトルを除いて 左右 42 字×29 行

2, 3 ページ目はそれぞれ 左右 42 字×36 行

分数は 2 行分と数えてください。

(3) 図版は、弊社で作成するための情報をお書き添えください。

写真は、元データを一緒にお送りください。

(4) 他書からの引用がある場合は、原文の該当部分のコピーを原稿と一緒にお願いします。

本誌ページ数の関係から、掲載量には限りがありますので、原稿選択および掲載時期の決定は弊社で行わせていただきますことをご了承ください。

掲載が決定した時点で連絡させていただきます。

詳しくは、弊社ホームページをご覧ください。

トップページ右上の [▶ 編集部より](#)

原稿送り先

〒604-0867

京都市中京区烏丸丸太町西入ル

数研出版株式会社 関西本社

第一編集部 中学通信誌係

## 編集後記

装いを新たに再出発して 2 号目となります本号には、様々な視点からのテーマの異なる 4 編を掲載しています。

テーマの異なる 4 編は、それぞれに興味深く、数学や数学教育の奥深さを感じました。

また、先生方の様々な取り組みを知ること、改めて先生方に尊敬の念を抱くとともに、我々も更に努力をしていかなければならないと身が引き締まる思いです。

もちろん、今回掲載した 4 編以外にも様々な取り組みがあることでしょう。

今後も、皆様が行っている研究の成果や授業例を、数多く紹介していきたいと考えております。

どうぞよろしくお願いいたします。

(T)