

小・中の学びの連続性を意識した教材開発 ～極限の考えに焦点を当てて～

坂井 武司

1. はじめに

現行の学習指導要領において、「円周の長さ」、「円の面積」、「円柱の体積」は小学校算数の学習内容、「角錐・円錐の体積」、「球の体積」は中学校数学の学習内容です。これらの学習内容に共通する数学的な背景は、極限の考えです。数列や関数の極限に関して、ある一定の数値に限りなく近づくことを収束するといい、その数値を極限值といいます。このような極限は高校数学の学習内容です。したがって、小学校算数や中学校数学では、極限が内在する学習内容を通して、一定の数値に収束するという極限の考えの素地を育むことが重要だと考えられます。

2. 小学校算数における「円の面積」の指導

小学校算数第6学年の3社の教科書では、図1に示すように「円の面積は、半径を1辺とする正方形の2倍よりも大きく、4倍よりも小さい」ということから、円の面積が導入されます。これは、図2に示す「二等辺三角形OAB<おうぎ形OAB<二等辺三角形OCD」という挟み込みの考えを用いています。その後、円を8等分、16等分、32等分、64等分し、できたおうぎ形を交互に並び替え、図3に示すように長方形(平行四边形)の面積に近似することにより、「円の面積＝半径×半径×3.14(円周率)」を導きます。ここでは、学習内容の本質に迫る「円の面積」の指導として、円に内接する正多角形と外接する正多角形の面積を求め、極限の考えに基づいて円の面積を導く教材開発を紹介します。

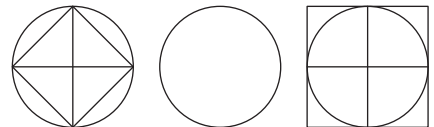


図1. 円の面積の導入方法

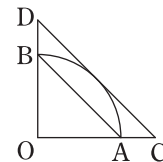


図2. 挟み込みの考え

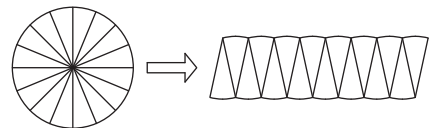


図3. 長方形(平行四辺形)への近似

3. 「円の面積」に関する教材開発

半径が10 cmの円の面積について考えます。そこで、図1を基に、 $10 \times 10 \times 2 \text{ (cm}^2\text{)} < \text{円の面積} < 10 \times 10 \times 4 \text{ (cm}^2\text{)}$ 、つまり、 $200 \text{ cm}^2 < \text{円の面積} < 400 \text{ cm}^2$ と見当付けさせます。次に、図4を提示し、外接する正方形の1辺が、内接する正方形の1辺に平行になることを捉えさせます。さらに、図2を提示し、おうぎ形OABが二等辺三角形OABと二等辺三角形OCDによって挟まれていることを掴ませると共に、図5を提示し、おうぎ形の中心角が 90° (円の4等分)、 60° (円の6等分)、 45° (円の8等分)の場合を基に、「中心角が小さくなると、2つの二等辺三角形の面積がおうぎ形の面積に近づいていく」ことを捉えさせます。

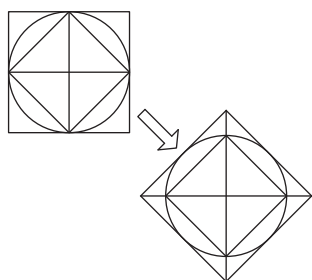


図 4. 正方形による挟み込み

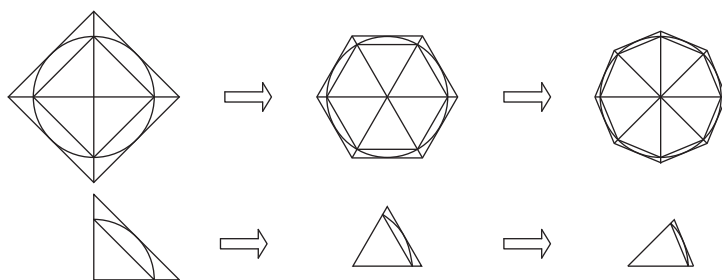


図 5. 円の 4 等分, 6 等分, 8 等分の場合

ここで、図 6 のような半径 10 cm の円を等分してできる中心角が 60° (円の 6 等分), 45° (円の 8 等分), 30° (円の 12 等分), 20° (円の 18 等分), 10° (円の 36 等分) の場合のおうぎ形 OAB 及びそのおうぎ形に内接する二等辺三角形 OAB と外接する二等辺三角形 OCD を作図し、高さ BE と底辺 CD を実測します。実測した高さ BE が底辺 OA (10 cm) の何倍になるか、また、実測した底辺 CD が高さ OF (10 cm) の何倍になるかを考えることにより、中心角が 60° , 45° , 30° , 20° , 10° , 5° , 1° の場合に、円の面積の値が含まれる範囲を算出します。中心角が 60° の場合、 $10 \times 10 \times 2.58 \text{ (cm}^2\text{)} < \text{円の面積} < 10 \times 10 \times 3.45 \text{ (cm}^2\text{)}$ となります。中心角が 5° (円の 72 等分), 1° (円の 360 等分) の場合は作図及び実測が困難であるため、教師が提示します。図 7 のように、算出した内接する正多角形の面積と外接する正多角形の面積の変化の様子をグラフに表し、面積が徐々に 314 cm^2 に収束することを視覚的に捉えさせ、「円の面積 = 半径 $\times$ 半径 $\times 3.14$ (円周率)」を導きます。

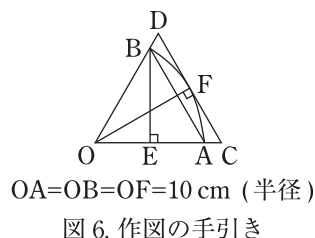


図 6. 作図の手引き

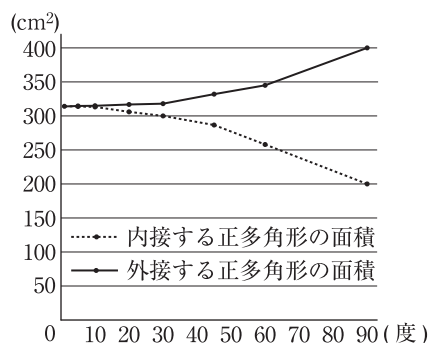


図 7. 内接する正多角形の面積と外接する正多角形の面積の収束

4. 中学校数学における「角錐・円錐の体積」

中学校第 1 学年の 7 社の教科書では、底面が合同で高さが等しい角柱と角錐の容器あるいは円柱と円錐の容器に水を入れ、その量を比べることにより、角錐や円錐の体積は、底面が合同で高さが等しい角柱や円柱の体積の $\frac{1}{3}$ になることを確認します。このことから、底面積が S 、高さが h の角錐や円錐の体積を V とし、「 $V = \frac{1}{3}Sh$ 」という式が導かれます。また、図 8 のように、底面が正方形で高さが正方形の 1 辺の長さに等しい四角錐を 3 個組み合わせることで立方体ができることを基に、四角錐の体積は、底面が合

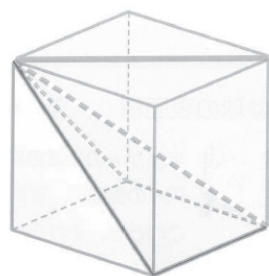


図 8. 角柱と角錐の体積の関係 (数研出版, 中学校数学 1, p.183)

同で高さが等しい四角柱の体積の $\frac{1}{3}$ になることを示している教科書もあります。ここでは、これらと別の方法として、小・中の学びの連続性の観点から、極限の考えに基づいて四角錐の体積を導く教材開発を紹介します。

5. 「角錐・円錐の体積」に関する教材開発

図9のような底面が1辺10 cmの正方形であり、高さが10 cmの正四角錐の体積について考えます。まず、区分求積法に基づいた図10、図11を提示します。高さを10等分し、高さに垂直な平面で正四角錐を切り取った切り口の正方形を底面とする正四角柱を積み上げた「正四角柱階段」の体積を求めます。このとき、正四角錐に内接する正四角柱階段と外接する正四角柱階段により、正四角錐が挟み込まれることを掴ませます。また、今回の場合、

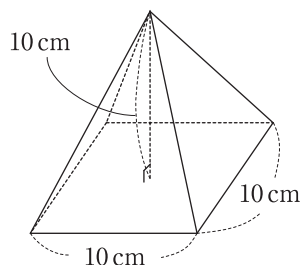


図9. 正四角錐

正四角柱階段において、1段上がるごとに、等分してできた長さだけ正方形の1辺の長さが短くなること、正四角錐に外接する正四角柱階段から最下段を引くと、内接する正四角柱階段になることを捉えさせておきます。高さを10等分した場合、外接する正四角柱階段における1段ずつの体積は、下から、 100 cm^3

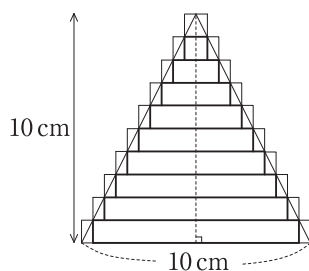


図10. 区分求積法

$(10 \times 10 \times 1 = 100)$, $81\text{ cm}^3 (9 \times 9 \times 1 = 81)$, $64\text{ cm}^3 (8 \times 8 \times 1 = 64)$, $49\text{ cm}^3 (7 \times 7 \times 1 = 49)$, $36\text{ cm}^3 (6 \times 6 \times 1 = 36)$, 25 cm^3

$(5 \times 5 \times 1 = 25)$, $16\text{ cm}^3 (4 \times 4 \times 1 = 16)$, $9\text{ cm}^3 (3 \times 3 \times 1 = 9)$,

$4\text{ cm}^3 (2 \times 2 \times 1 = 4)$, $1\text{ cm}^3 (1 \times 1 \times 1 = 1)$ であり、合計は 385 cm^3

となります。内接する正四角柱階段の体積は、外接する正四角柱階段から最下段を引いた体積になるので、 285 cm^3 となります。

したがって、高さを10等分した場合の正四角錐の体積の値が含まれる範囲は、 $285\text{ cm}^3 < \text{正四角錐の体積} < 385\text{ cm}^3$ です。正四角柱階段の体積が、底面が1辺10 cmの正方形、高さが10 cmの正四角柱の何倍になるかを考えると、 $10 \times 10 \times 10 \times 0.285 (\text{cm}^3) <$

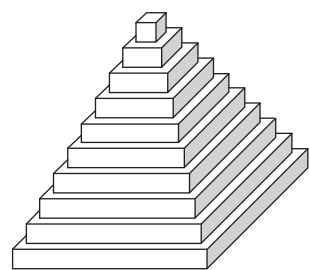


図11. 正四角柱階段による近似

正四角錐の体積 $< 10 \times 10 \times 10 \times 0.385 (\text{cm}^3)$ と表せます。同様に、高さを20等分した場合の正四角錐の体積の値が含まれる範囲を算出すると、 $10 \times 10 \times 10 \times 0.309 (\text{cm}^3) < \text{正四角錐の体積} < 10 \times 10 \times 10 \times 0.359 (\text{cm}^3)$ となります。50等分、100等分、200等分、300等分の場合については、Excel等の表計算ソフトを用いるとよいでしょう。以下に、50等分、100等分、200等分、300等分の場合に、正四角錐の体積の値が含まれる範囲を示します。

50等分： $10 \times 10 \times 10 \times 0.323 < \text{正四角錐の体積} < 10 \times 10 \times 10 \times 0.343$

100等分： $10 \times 10 \times 10 \times 0.328 < \text{正四角錐の体積} < 10 \times 10 \times 10 \times 0.338$

200等分： $10 \times 10 \times 10 \times 0.331 < \text{正四角錐の体積} < 10 \times 10 \times 10 \times 0.336$

300等分： $10 \times 10 \times 10 \times 0.332 < \text{正四角錐の体積} < 10 \times 10 \times 10 \times 0.335$

図 12 のように、内接する正四角柱階段の体積と外接する正四角柱階段の体積の変化の様子をグラフに表し、体積が徐々に 333 cm^3 に収束することを視覚的に捉えさせます。正四角錐の体積は、底面が合同で高さが等しい正四角柱の体積 1000 cm^3 ($10 \times 10 \times 10 = 1000$) の 0.333 倍、つまり $\frac{1}{3}$ になっていることから、底面積が S 、高さが h の正四角錐の体積を V とし、「 $V = \frac{1}{3}Sh$ 」という式を導きます。

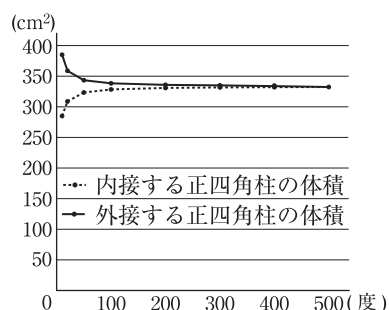


図 12. 内接する正四角柱階段の体積と外接する正四角柱階段の体積の収束

円錐の場合は、図 10 を基に、図 13 のような回転体としての円柱階段を考え、正四角錐の場合と同様の方法により、底面積が S 、高さが h の円錐の体積を V とし、「 $V = \frac{1}{3}Sh$ 」という式を導くことができます。この場合、底面の半径が 10 cm であり、高さが 10 cm の円錐の体積について考えます。また、四角柱の体積の $\frac{1}{3}$ が四角錐の体積となること、四角柱は三角柱を合わせた立体であることから、三角柱の体積の $\frac{1}{3}$ が三角錐の体積になることを導きます。同様に、図 14 のように、正角柱は三角柱を合わせた立体であることから、正角柱の体積の $\frac{1}{3}$ が正角錐の体積になることを導きます。最後に、図 5 を基に、正角柱の底面に関して、正多角形の角の数が大きくなると、正多角形の面積が円の面積に近づいていくことから、円柱の体積の $\frac{1}{3}$ が円錐の体積になることを導くことができます。

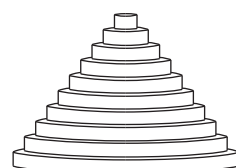


図 13. 円柱階段

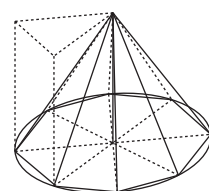


図 14. 三角錐と正角錐

6. おわりに

中学校数学において、極限の考えにふれることができるのは、上述の内容と大数の法則に基づいた経験的確率に関する内容です。数少ないチャンスを生かすと共に、他の教材についても、小・中の学びの連続性の観点から、学習内容の本質に迫る教材開発が大切であると考えられます。

参考文献

廣瀬隆司, 坂井武司, 石内久治, 齋藤昇 (2013): 「極限の考えを導入した円の面積の授業実践とその効果」, 『数学教育学会誌』, 数学教育学会, Vol.53, No1・2, pp.51-60.

(鳴門教育大学 准教授)