

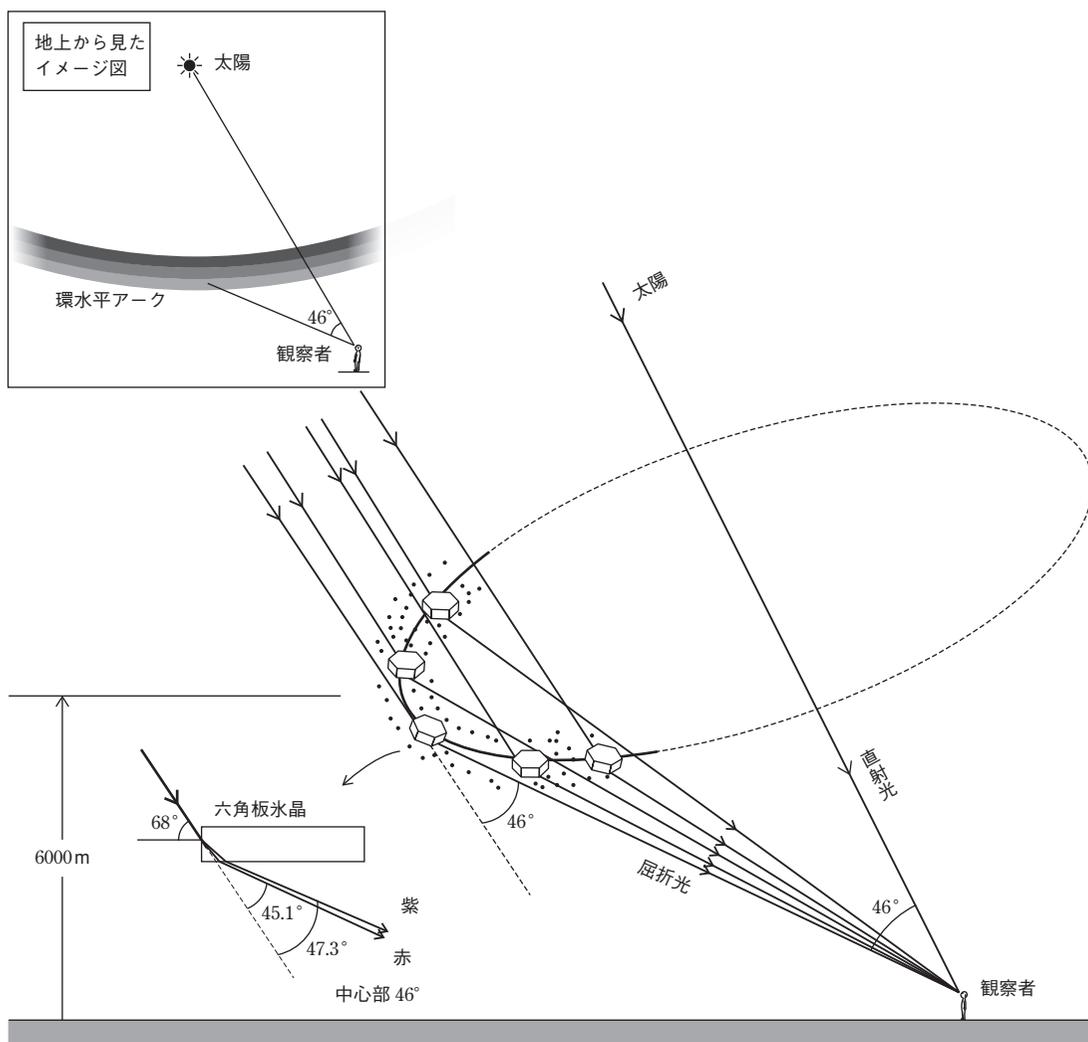
# サイエンスネット

物化生地...

数研出版株式会社

SCIENCE NET

Contents	▶ 特集 1 / 西條敏美 …2	▶ 特集 3 / 中島健一郎…10
	▶ 特集 2 / 川本克也 …6	▶ コラム / 喜多 巧 …14



環水平アークの原理図

元徳島県公立高校教諭 西條 敏美

環水平アークは、太陽の下方約 46 度の地平線近くに現れる、やや上向きにそれた虹色の帯である。普通の虹と同様に、7 色の帯の上側が赤で下側が紫になっている。このときの太陽高度は約 68 度である。

# 環水平アークの現出原理とその教材化

元徳島県公立高校教諭 西條 敏美

## 1. はじめに

雨上がりでもないのに、きれいな7色の帯が天空にかかることがある。この帯は、太陽が見える方向の地平線近くにはほぼ水平に現れる(表紙)。7色の帯の上側が赤で下側が紫であることは、普通の虹と同じであるが、やや上向きにそれている。この不思議な7色の帯には、環水平アーク(あるいは水平環、水平弧)というかたい名前がつけられている。それだけ実際に見えることが少ないことの現れだろうが、出ていても気づかないということもあるかもしれない。普通の虹でも、見えるのは年平均2、3回程度ではないだろうか。

ときに生徒から、「先生、こんな不思議な虹を見た」と、その原理を尋ねられることがある。普通の虹はしばしば教材としても取り上げられるが<sup>1)</sup>、環水平アークとなるとほとんどない。

そこで、高校の物理・地学教材としての視点から環水平アークの現出原理を考えてみた。

## 2. 特徴

環水平アークの現れ方を整理してみると、次のようになる。

- ① 太陽の方向に、太陽の下方約46度離れた所に、ほぼ水平に現れる。
- ② このときの太陽高度は約68度である。真冬のように太陽が低い時期には現れず、夏場の昼前後を中心に、太陽が頭上高くのぼるころに現れる。
- ③ 7色の帯は雲を伴って現れる。この雲は巻層雲など、高度6000m以上にできる上層雲である。一面晴れわたった青空には現れない。
- ④ 7色の並びは上側(太陽に近い側)が赤で、下側が紫となり、やや上にそれている。

## 3. 現出原理と教材化の視点

普通の虹は太陽と反対側に見え、雨上がりの水滴による太陽光の反射・屈折によって生じる。環水平アークも何かの粒子に太陽光が当たった結果生じる現象であろうことは察しがつく。この粒子として考

えられるのは、氷晶(氷の結晶)である。このことは、氷晶からなる巻層雲などを伴っていることからわかる。

環水平アークの現出原理を解析していくには、物理としては屈折の法則の知識だけですむ。数学としては、平面幾何学、三角法、関数の最大・最小、微分法などの知識が必要で、こちらがやややっかいである。気象としては雲の知識、氷晶の知識が必要であるが、氷晶の形程度にとどめておくとよい。

特に環水平アークが現れる位置(太陽高度68度、太陽の下46度)と色の順に注目して、三角プリズムでの偏向角を求める演習教材として使うのがよいだろう。解析的計算とともに、数値計算による作図と合わせて考えるとよい。

## 4. 解析的計算

氷晶はほとんどが六角柱か六角板の形をなしているという<sup>2)</sup>(図1)。大きさは0.001~0.1mm程度と小さいが、可視光線の波長 $10^{-4}$ mmに比べると、10~1000倍も大きいので幾何光学として扱える。六角柱氷晶は六角面を垂直(棒を横たえた状態)、六角板氷晶は六角面を水平にして、高度6000m以上の上空に浮遊していると考えられる。

この氷晶に太陽光線が当たると、どのように反射と屈折を起こすのだろうか。環水平アークは太陽の

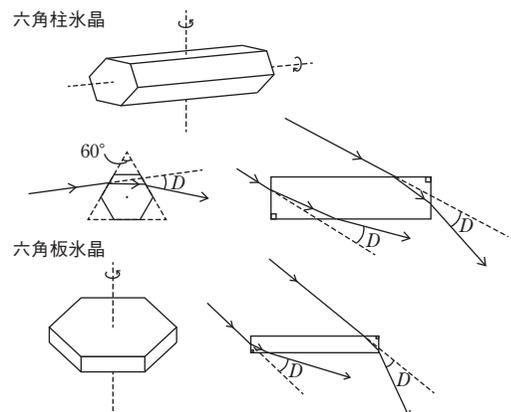


図1 六角柱と六角板の形状をした氷晶 それぞれの屈折光線を示す。

方向に見えるから、1度屈折して氷晶内に入り、続いて2度目の屈折をして射出していく光線を考えるとよい。その場合、横たわった六角柱氷晶は頂角60度プリズムか、頂角90度プリズムとしてはたらく。六角板氷晶は90度プリズムとしてはたらく。90度プリズムとしてはたらく場合は氷晶の側面から入射する場合と上面から入射する場合がある。いずれにしても、頂角90度と頂角60度のプリズムのはたらくをする場合しかない。これらを視覚的に理解するために、厚紙で氷晶の大きな模型をつくって考察するとよい(図2)。

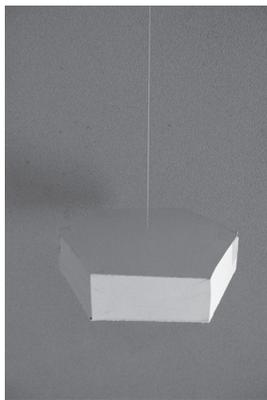


図2 吊り下げられた六角板氷晶の紙模型

ここで、一般性をもたせるために、頂角 $\alpha$ の三角プリズムABCについて解析してみる(図3)。

辺AB上の点Pに入射角 $i$ で入射した太陽光線は屈折角 $r$ で屈折してプリズム内に入り、他の辺AC上の点Qに入射角 $r'$ で入射し、屈折角 $i'$ で射出とする。このときに入射方向に対して射出光線の振れの角を $D$ で表し、偏向角と名づけよう。この偏向角 $D$ を入射角 $i$ (または屈折角 $r$ )と頂角 $\alpha$ の関数として表すことを考える。まず、点Pと点Qにおいては屈折の法則が成り立つ。

$$\text{点P} \quad \frac{\sin i}{\sin r} = n \quad (1)$$

$$\text{点Q} \quad \frac{\sin i'}{\sin r'} = n \quad (2)$$

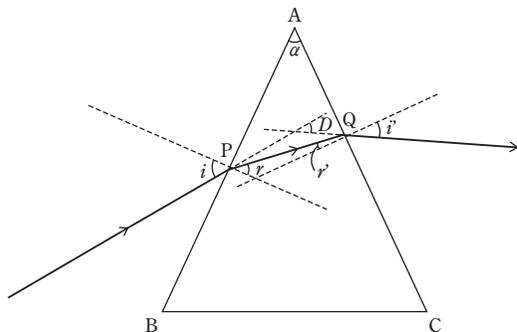


図3 頂角 $\alpha$ の三角プリズムに当たった太陽光線の経路

ここで、 $n$ は空気に対する氷の屈折率である。図形的関係から

$$\text{偏向角} \quad D = i + i' - \alpha \quad (3)$$

$$\text{頂角} \quad \alpha = r + r' \quad (4)$$

が成り立つ。4つの式から

$$D = i + \sin^{-1} \left[ n \sin \left\{ \alpha - \sin^{-1} \left( \frac{\sin i}{n} \right) \right\} \right] - \alpha \quad (i \text{ の関数}) \quad (5)$$

$$D = \sin^{-1} (n \sin r) + \sin^{-1} \{ n \sin (\alpha - r) \} - \alpha \quad (r \text{ の関数}) \quad (6)$$

を得る。これで、偏向角 $D$ を入射角 $i$ 、または屈折角 $r$ の関数として表したことになる。

この偏向角 $D$ は入射角 $i$ 、または屈折角 $r$ の変化に伴ってどのように変化するのだろうか。

式(5)より式(6)のほうが簡単なので、式(6)より $\frac{dD}{dr}$ を算出し変形すると

$$\frac{dD}{dr} = \frac{n \cos r}{(1 - n^2 \sin^2 r)^{\frac{1}{2}}} - \frac{n \cos r'}{(1 - n^2 \sin^2 r')^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

を得る。

本式より、 $r = r'$ のとき、 $\frac{dD}{dr} = 0$ となり、 $D$ は極値(最小値) $D_m$ をとることがわかる。線分PQが辺BCに平行になる場合ということになる。その値は

$$D_m = 2 \sin^{-1} \left( n \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \alpha \quad (8)$$

と求められる。

この最小値 $D_m$ が存在することがポイントとなる。この最小偏向角 $D_m$ の周辺では、入射角 $i$ が少し変動しても、射出光線は広がらずこの角に射出するからである。このときの入射角 $i_m$ と屈折角 $r_m$ を算出すると、次となる。

$$i_m = \sin^{-1} \left( n \sin \frac{\alpha}{2} \right) \quad (9)$$

$$r_m = \frac{\alpha}{2} \quad (10)$$

点Pでの入射角が小さくなると、点Qでの射出角が大きくなり、やがて直角となり、射出光線はなくなってしまう。言いかえと、点Qで全反射になってしまう。この全反射が起こるときの臨界の入射角 $i_c$ 、屈折角 $r_c$ 、および偏向角 $D_c$ は、 $i' = 90^\circ$ とおくことにより

$$i_c = \sin^{-1} \left\{ n \sin \left( \alpha - \sin^{-1} \frac{1}{n} \right) \right\} \quad (11)$$

$$r_c = \alpha - \sin^{-1} \frac{1}{n} \quad (12)$$

$$D_c = \sin^{-1} \left\{ n \sin \left( \alpha - \sin^{-1} \frac{1}{n} \right) \right\} + 90^\circ - \alpha \quad (13)$$

と求められる。

ここで、偏向角の最小値  $D_m$  が値をもつためには

$$\alpha \leq 2 \sin^{-1} \frac{1}{n} \quad (14)$$

でなければならないこともわかる。

## 5. 数値計算による作図

解析的計算だけではわかりにくいので、数値計算して作図を試みよう。

氷の屈折率  $n$  は、赤で 1.307、紫で 1.317 程度である。ここでは、赤で、 $\alpha = 90^\circ$  の場合について、式(1)~(4)を用いて、偏向角  $D$  を数値計算で求めてみた(表 1)。 $\alpha = 60^\circ$  の場合も同様に計算して、2つ合わせて図示した(図 4)。

図から、偏向角  $D$  は入射角  $i_m$  に対して最小値  $D_m$  をとることがよくわかる。この最小値をとる入射角で入射した光線は強い強度をもっているの、はっきり見えることになる。

なお、 $i_m$ 、 $D_m$ 、さらには全反射が起こるときの  $i_c$ 、 $D_c$  などの値は、図よりおよその値は読み取れるが、正確な値は先の計算式から算出できる。紫の場合と合わせて、計算で求めた結果を示す(表 2)。

つまるところ、頂角  $90$  度の場合、偏向角の最小値  $D_m$  は赤で  $45.1$  度、紫で  $47.3$  度となる。赤から紫までのスペクトル幅は  $2.2$  度程度で約  $46$  度周辺となる。同様に、頂角  $60$  度の場合、偏向角の最小値  $D_m$  は赤で  $21.6$  度、紫で  $22.4$  度となる。赤から紫までのスペクトル幅は  $0.7$  度程度と小さく、約  $22$  度周辺となる。

偏向角に最小値があることは、屈折光線の道筋を実際に作図すると、もっとよくわかる(図 5)。

偏向角に最小値  $D_m$  が存在するための頂角  $\alpha$  を式(14)から計算してみると、 $n = 1.307$  の場合、 $99.8$  度以下となる。それゆえ  $120$  度の頂角をもつような場合には、このような結果は成り立たない。

表 1 偏向角  $D$  と入射角  $i$  の関係

$n = 1.307$ (赤), $\alpha = 90^\circ$				
入射角 $i$ ( $^\circ$ )	屈折角 $r$ ( $^\circ$ ) $\sin r = \frac{\sin i}{n}$	$\alpha - r$ ( $^\circ$ )	射出角 $i'$ ( $^\circ$ ) $\sin i' = n \sin(\alpha - r)$	偏向角 $D$ ( $^\circ$ ) $D = i + i' - \alpha$
0	0.00	90.00	—	—
5	3.82	86.18	—	—
10	7.64	82.37	—	—
15	11.42	78.58	—	—
20	15.17	74.83	—	—
25	18.82	71.18	—	—
30	22.49	67.51	—	—
35	26.03	63.97	—	—
40	29.46	60.54	—	—
45	32.75	57.25	—	—
50	35.88	54.12	—	—
55	38.81	51.19	—	—
60	41.50	48.50	78.21	48.21
65	43.91	46.10	70.34	45.34
70	45.97	44.03	65.29	45.29
75	47.51	42.49	62.24	46.70
80	48.89	41.11	59.24	49.24
85	49.66	40.34	57.79	52.79
90	49.92	40.08	57.31	57.31

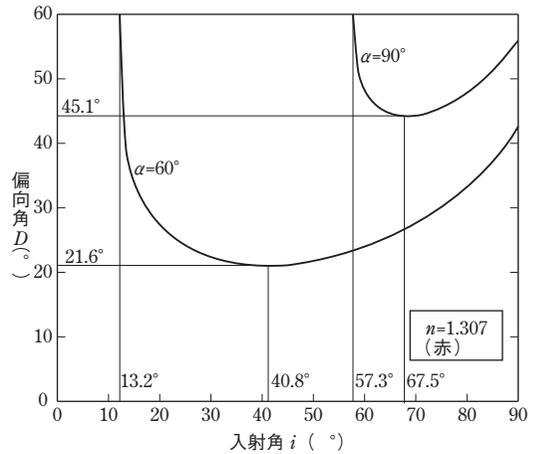


図 4 偏向角  $D$  と入射角  $i$  との関係

## 6. 環水平アーチが現れる場合の氷晶での屈折

環水平アーチは、太陽の方向に太陽の下方、約  $46$  度にほぼ水平上向きにそれて  $7$  色が見える現象である。約  $46$  度に強い光線が出ているということから、頂角  $90$  度をもつ氷晶に当たった太陽光線が引き起こしているといえる。氷晶の側面から入射して、底面から射出していく光線である。六角柱氷晶

表2 偏向角の最小値と全反射が起こる偏向角などの計算値

		$\alpha = 90^\circ$ の場合	$\alpha = 60^\circ$ の場合
最小値	入射角 $i$ ( $^\circ$ )	$n = 1.307$ (赤) $n = 1.317$ (紫)	67.5 68.6 (約 68)
	屈折角 $r_m$ ( $^\circ$ )	$n = 1.307$ (赤) $n = 1.317$ (紫)	45.0 45.0 30.0
	偏向角 $D_m$ ( $^\circ$ )	$n = 1.307$ (赤) $n = 1.317$ (紫)	45.1 47.3 (約 46)
全反射	入射角 $i_c$ ( $^\circ$ )	$n = 1.307$ (赤) $n = 1.317$ (紫)	57.3 59.0 13.2 14.0
	屈折角 $r_c$ ( $^\circ$ )	$n = 1.307$ (赤) $n = 1.317$ (紫)	40.1 40.6 10.1 10.6
	偏向角 $D_c$ ( $^\circ$ )	$n = 1.307$ (赤) $n = 1.317$ (紫)	57.3 59.0 (約 58)
主な現象		環水平アーキ 環天頂アーキ 太陽、月の暈 (46° ハロ)	太陽、月の暈 (22° ハロ)

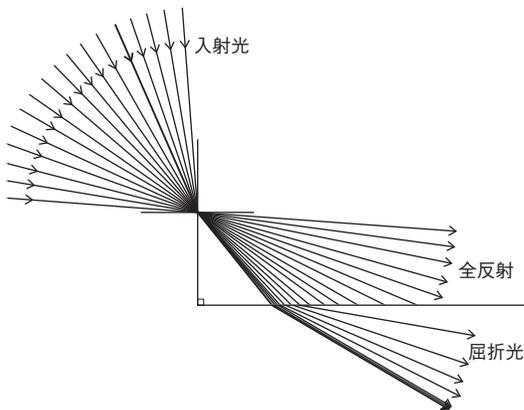


図5 屈折する光線の様子

でも六角板氷晶でも可能であるが、後者が引き起こしていると考えられている。この氷晶は六角面を水平にして、ほぼ同じ位置でゆらぎ、また結晶軸を中心に回転しているが、回転しながらも側面が太陽に向いた瞬間ごとに46度の方向に強い光を射出していることになる。1回転のうちに6回の射出光線があることにもなる。横たわった六角柱氷晶は転がるように回転したり、鉛筆を回転させるようにも回転したりする。六角面がきちんと垂直になるには、六角板より不安定であり、安定だったとしても、1回

転のうちで六角面が太陽の方向を向くのは2回しかない。それだけでも六角板氷晶に比べて3分の1の光の強さになってしまう。

氷晶は高度6000mもの高いところに多数浮かんでいても、その分布はそんなに広くはないので、円弧の一部分しか常に現れない。そのため、虹のように半円にはなりえない。

太陽高度が約68度のときに現れることは、氷晶への入射角が約68度のとき最大光度になることからわかる。ちなみに太陽高度が約58度以下では氷晶内で全反射してしまい、射出光線すら存在しない。

赤が上、紫が下になることは、赤の偏向角が紫よりやや小さいことからわかる。

## 7. おわりに

環水平アーキは太陽と氷晶がつくり出す1つの現象にすぎない。環天頂アーキという、ほとんど天頂に現れる類似現象もある。これは同じく六角板氷晶の上面から太陽光線が入射し、側面から射出していく光線が天頂に7色の帯をつくる現象である。他によく知られている現象として、太陽や月の周りにできる傘(ハロー)もある。太陽光線が氷晶とどのように反射・屈折するかによって、さまざまな現象を引き起こす<sup>2)</sup>。いずれの現象も、個々の氷晶が結晶軸をそろえて十分に分布をしている場合にはっきりと現れる。

環水平アーキを普通の虹と比較しながら扱おうと面白いだろう。太陽光が、三角プリズムと水滴のように丸い球(円柱)に当たって2度屈折して射出する光線を比べてみると、前者に最大強度の光線があるのに、後者にはないのは、それだけでも不思議なことである。

### 参考文献

- 1) 西條敏美著『授業:虹の科学』(太郎次郎社エディタス, 2015).
- 2) R. グリーンラー著, 小口高・渡邊堯訳『太陽からの贈りもの』(丸善, 1992).