プログラミングでΣの関係式を発見

山口県立岩国高等学校 教諭
山下 裕司

1. 数学の原体験を与えるプログラミング

私は元々数学科の教員である。高校現場に情報科が導入されて以来16年間情報科教育に魅力を感じて携わってきた。今回の学習指導要領改訂を待たずにプログラミングを指導に取り入れてきた。その中で数学科指導において感じ取れなかった生徒の新鮮な反応に驚かされることがある。例えば，数列の指導において板書で生徒に提示する3つ4つの具体例では生徒の顔は輝かない。プログラミング指導の繰り返し構造の例で等差数列・等比数列およびそれらの和を題材にプログラミングをして実行結果を目にしたとき生徒は感動する。これを数列における原体験と呼ぶことにする。原体験とは，何かを学ぶ際にまずたくさんの具体例に触れておこうという意味である。この原体験は理解・学力向上に大きな効果がある。以下Excel VBAによる実践例を示す。

```
Sub 等比数列 ()
a = Cells(1, 2)
r = Cells(2, 2)
For n = 1 To 10
 Cells(n, 3) = a*r^(n-1)
 Cells(n, 4) = a*(r^n-1)/(r-1)
Next n
End Sub
```

	A	B	C	D
1	初項 a=	3	3	3
2	公比 r=	5	15	18
3	表示開始		75	93
4			375	468
5			1875	2343
6			9375	11718
7			46875	58593
8			234375	292968

図1　等比数列

実行させるときは変化がわかるように実行ボタンを表計算シート上に作るのが良い。適当な図形を挿入して，右クリックからマクロの登録，図形の効果から面取りをすればおしゃれな実行ボタンの出来上がりである。表計算上の関数でももちろんできるのだが，数学で学ぶ公式が数式としてそのまま表れているところがプログラムの魅力である。

2. コード化で概念がより明確に

数学の授業でΣの記号を示すと生徒の顔が曇ってくる。しかし，情報の授業で，Σの記号を説明すると，理解が追い付かずもやもやした感じになるのは同じだが，数学でΣについて未習であるにもかかわらず，プログラミングして実行する頃には理解が深まる。さらに表示された表でΣの説明を加えると納得の表情となる。Σはとてもプログラミングと相性がいい記号である。

```
Sub シグマの表示 ()
For n = 1 To 10
 Cells(n, 1) = n
 Cells(n, 2) = n*(n+1)/2
 Cells(n, 3) = n^2
 Cells(n, 4) = n*(n+1)*(2*n+1)/6
Next n
End Sub
```

	A	B	C	D	E
1	1	1	1	1	
2	2	3	4	5	
3	3	6	9	14	表示開始
4	4	10	16	30	
5	5	15	25	55	
6	6	21	36	91	
7	7	28	49	140	
8	8	36	64	204	
9	9	45	81	285	
10	10	55	100	385	

図2　シグマの表示

3. 漸化式を使って高次のΣを表示

1. で示した等比数列の例や，2. で示したシグマの表示では第 n 項を n の式を使って直接求めたが，ここでは漸化式で表示させてみた。生徒の中では漸化式という概念をコード化することによって整理され明確になる。漸化式を使うと公式を知らない高次のΣも表示できるところが肝である。初項1だけは実行前にセルに入力しておく。4次以上のΣの公式が教科書にないから仕方なく漸化式を使用するというよりも，プログラムにおいては漸化式を使用するほうが合理的であることを強調しておきたい。

```
Sub 高次のシグマ ()
For n = 1 To 7
 For k = 2 To 10
  Cells(k, n) = Cells(k-1, n) + k^n
 Next k
Next n
End Sub
```

図3の1列目と3列目から $(\Sigma k)^2 = \Sigma k^3$ の関係が見て取れる。生徒はその関係を数式からではなく表示された数列を見て感じとる。もちろんその関係式

が常に成立することの証明は必要である。

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	5	9	17	33	65	129
3	6	14	36	98	276	794	2316
4	10	30	100	354	1300	4890	18700
5	15	55	225	979	4425	20515	96825

図３　高次のシグマ

4. Σの関係式をプログラムで模索する

Σの二項間の関係式として $(\Sigma k)^2 = \Sigma k^3$ は簡単に見て取れたが，では，他にもこのような関係式が存在するのではなかろうか。この疑問が生徒の頭に浮かぶのも至極当然である。とはいえ，数学の授業ではなかなか生じない疑問でもある。その違いは，大量の計算をいとわない発想に至るか否かにかかる。「大量の反復計算をいとわず解決方法を模索する思考」が私にとってはプログラミング的思考である。これは文部科学省の定義するところのプログラミング的思考とは異なる。

さて，3. で示した高次のシグマで手に入った上図であるが，ここから関係式を発見することを試みた。Σk^7 までで係数の範囲を－ 10 ～ 10，指数の範囲を 1 ～ 5 と限定して成立する二項間の関係式を模索してみた。紙面の都合上，：で改行を表す。

```
Sub 二項間 ()
k = 5:  r = 1
For i = 1 To 6:  x = Cells(k, i)
 For j = i + 1 To 7:  y = Cells(k, j)
  For a = 1 To 10:  For b = 1 To 10
   For p = 1 To 5:  For q = 1 To 5
     If a*x^p = b*y^q Then
      Cells(r, 8) = i:  Cells(r, 9) = j
      Cells(r, 10) = a:  Cells(r, 11) = b
      Cells(r, 12) = p:  Cells(r, 13) = q
      r = r + 1
     End If
Next q:  Next p:  Next b:  Next a:  Next j:  Next i
End Sub
```

等式を発見するたびに 8 列以降に係数や指数を表示させたが，いずれも $(\Sigma k)^2 = \Sigma k^3$ の関係を示すものであった。調べた範囲ではこれ以外に二項間の関係式は存在しないことがわかった。

最後に三項間の関係式を調べることにした。処理回数が格段に増えることから工夫をしながらプログラミングを進めた。

```
Sub 三項間 ()
k = 6:  r = 1
For i = 1 To 5:  x = Cells(k, i)
For j = i + 1 To 6:  y = Cells(k, j)
For h = j + 1 To 7:  w = Cells(k, h)
For a = 1 To 10:  For b = -10 To 10
 If b = 0 Then GoTo tugib
For c = -10 To 10:  If c = 0 Then GoTo tugic
For p = 1 To 5:  For q = 1 To 5:  For s = 1 To 5
 If a*x^p + b*y^q + c*w^s = 0 Then
 Cells(r, 8) = i:  Cells(r, 9) = j:  Cells(r, 10) = h
 Cells(r, 11) = a:  Cells(r, 12) = b:  Cells(r, 13) = c
 Cells(r, 14) = p:  Cells(r, 15) = q:  Cells(r, 16) = s
 r = r + 1
 End If
Next s:  Next q:  Next p:  tugic:  Next c:  tugib:
Next b:  Next a:  Next h:  Next j:  Next i
End Sub
```

等号が成立した際にセルに書き込まれる係数・指数の組み合わせの中から偶然生じた等式や，相互に導き出せる関係式を除いていった結果，次の 3 つの関係式を手に入れることができた。

$$8(\Sigma k)^3 - 9(\Sigma k^2)^2 + \Sigma k^3 = 0$$
$$4(\Sigma k)^3 - 3(\Sigma k^2)^2 - \Sigma k^5 = 0$$
$$2(\Sigma k)^4 - \Sigma k^5 - \Sigma k^7 = 0$$

もちろん 6 項までの和（プログラム中の $k = 6$）で成立した等式であるから，これが常に成立するかについては証明を要する。生徒に Σk^{n-1} までの公式を用いて，Σk^n の公式を導く手順を示したところ，彼らはじっくりと取り組み，Σk^4 から Σk^7 までの公式を導いたうえで，それらを上記三式に代入して，三式とも Σ の関連式として成立することを証明して見せた。上記三式の発見は高校生として驚くべき成果だと思う。この授業の過程で様々な発見があり，指導する側が驚かされる場面が多々あった。生徒のモチベーションと深い学びは，プログラミングのもたらす効果だったと思う。