

生徒とのコミュニケーションを軸に展開する コンピュータ活用数学授業

埼玉県立新座北高等学校教諭
白石 紳一

1. はじめに

本校は、平成17年と18年の2年間にわたり、埼玉県の県立学校間ネットワークモデル事業の研究指定校としてeラーニングによる授業の活性化をテーマに研究してきた。主に研究してきた分野は、数学と情報で、内容は教材開発である。本稿では、主に数学についてレポートする。コンピュータは、授業に活用すればなんでも効果があるというものではない。授業を行う上では、生徒の実態を踏まえた上で、十分な教材研究と生徒の理解に適した授業の組み立てが求められている。

数学の例で言えば、数学の授業が意味を持ち、活性化するためには、生徒が幅広い概念をしっかりと形成することと、その概念を生徒自らの判断で様々な観点から見直すことのできる力の育成が必要だと考えられる。この2つの目標を達成するために、黒板で問題の解法だけを解説するのでは、不十分である。数学の概念のしっかりと形成のためには、「授業の中で適切なメタファ(内容を表すとえのこと)を選択」と「メタファを使った指導の文脈」が鍵となると考えられる。生徒の学習は、その文脈の中で生徒が言葉で数学の概念や現象を表現する事から、様々な観点からの考える力や、イメージを豊かにすることがなされると思われる。

数学の授業でのメタファ(例えばグラフ)をうまく見せる指導の文脈を作るには、コンピュータの活用が有効である。コンピュータによる動きの表現は、コンピュータを使用しない場合では、ほとんど不可能でもある。さらに、指導の文脈はコンピュータの画面を中心にして、色々な予想や議論を授業で行うことから作り上げられる。こうした活動は、生徒が持つイメージを発展させ、様々な観点からの見方を伸ばすことができる。図1は、コミュニケーションを重視した授業における「数

式」「言葉」「グラフ」の3つの関係を示した図である。概念は、単に単純な言葉や数式の連結で構築することはできない。3つの要素におけるそれぞれの相互作用を何度も繰り返して行うことからしっかりと概念やイメージが構成されるものと考えられる。

コンピュータによるグラフ表現は多彩であり、その表現を使って、数学について実験的な授業や、数学に関して議論できる授業が構成できる。こうしたタイプの授業は、多種多彩であり、生徒の実態に応じて様々な文脈の授業を構成することができる。

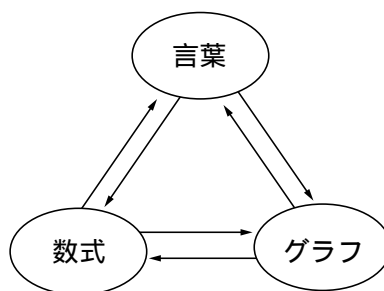


図1 数式 - 言葉 - グラフの関係

文脈を工夫すれば、授業の目的に応じて、帰納的な思考を要求することや、生徒の発言を元に演繹的に実験をすることもできる。ITにコミュニケーションを組み合わせたICTによる授業は、生徒の積極的な授業参加を促し、活発な数学についての認知操作を引き出すことを可能にする。生徒と教師、あるいは生徒同士の言葉によるやりとりは、各自の持っている数学についての表現をぶつけ、内容を確認する学習の場となっている。ICT活用授業における生徒の学習行動が、生徒の思考を柔軟にし、数学のイメージの定着に結びつくのである。つまりICT活用授業は、単に数学につい

での理解を深めるだけでなく、人間力向上のために有力な方法であると思えるのである。

また、教師の立場から考えると、数学の概念は、言葉を通じて整理されて初めてしっかりした概念になるとも考えられる。これは見方を変えれば、数学の理解の状態を評価するための一つの基準にもなる。つまり従来は、ある問題が解けたかどうかは数学の理解の基準であったが、ある数学の内容を言語で表現することから理解の状態を評価できるのではないかと考えられる。

古藤¹は、授業における発問を重視し、思考を誘発する刺激情報は、3つの要素が必要であると主張している。第1は、学習者に「驚き」「疑問」「意外性」があること。第2は、学習者が多少困難を感じたり、時としては困惑や不安感を抱くような情報であること。第3には、学習者の既知の知識や経験のパターンと相克するような情報であることとしている。こうしたことは、授業一般に通用する教育方法であるが、コンピュータ活用授業でもこうした工夫やアイデアは大切であると考えられる。コンピュータを使った動画や静止画を授業のどこでどのように提示し、どのように生徒の思考を引き出すかは、今後の課題である。いかにすばらしいコンピュータやソフトが開発されても生徒の実態に応じた授業を組み立てるのは、現場の教師である。今後授業を活性化させるための授業の在り方の研究が実践的に進むことが必要であると考えられる。

2. 実践例

2次関数は、全高校生にとって必修単元である。そこで本稿では、コンピュータを活用した場合特に効果的になる授業として、2次関数の単元を取り上げることにした。また、eラーニングという生徒の個別学習を思い浮かべるが、提示用の教材を用意して生徒とコミュニケーションをしながら授業を組み立てることも可能である。本事例は、GRAPESの画像を元にして動画を作り、それをeラーニング教材として活用した実践例である。

(1) 教科 数学

(2) 単元名

2次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ

(3) 対象

高校1年生、四則演算や数学の基本的な操作はできる。グラフの読み方も座標 (x, y) と x 軸 y 軸との関連は、つけられる。ただし2次関数については、中学で学習した $y = x^2$ までしか知らない。グラフ描写経験については、特定の点をプロットして描いた経験がある程度。

(4) 目標

$y = ax + b$ の復習から、2つの係数の変化からグラフの関係を予測できる。

$y = a(x - p)^2 + q$ の各係数 a, p, q について定性的理解をする。

$y = a(x - p)^2 + q$ の各係数 a, p, q が変化するとき、グラフがどう変化するのかを言葉で表現できる。

通常は、「 $y = ax + b$ 」(1)、「 $y = ax^2$ 」(1)、「 $y = ax^2 + q$ 」(2)、「 $y = a(x - p)^2$ 」(2)、「 $y = a(x - p)^2 + q$ 」(2)と教科書は進める。括弧内は、標準時間数で合計8時間である。生徒には、プロットで各グラフを描かせ、平行移動の概念を加えてまとめていく。本実践例による授業のパターンでは、生徒の反応によって時間数の変動はあるものの、ほぼ2～3時間で終了させることができる。

コミュニケーションを活用した授業の展開として、大まかに2つのパターンが考えられる。一つは、教師の側で展開を想定して提示していく流れである。概念の様々な側面を見せながら生徒に質問を投げかける。もう一つは、生徒の発想を受けて、その発想を実験して、発想の真偽を確認したり、次の解釈を引き出す文脈を作ることである。授業の流れで生徒の発想が出たときには、実験的に展開することができる。バグ概念を訂正するときなどには、有効である。

・シナリオ例1

数式とグラフの関連を、コンピュータで示す。

次に、なぜそうなるのかを言葉で表現させる(表現する)。

違う現象を起こすための条件を生徒に言葉で表現させる。

その表現をもとに、実際にコンピュータで実験する。

正しい推論を生徒が思いつく。

一般論としてまとめる。

・シナリオ例2

命題(生徒の案または、教師の案)

結果が、納得できるかを聞く。

シミュレーション実験。

具体例の点検または、修正する。

一般論としてまとめる。

(5) 授業展開例

以下の教師と生徒とのやりとりは、シナリオ例1にそった授業展開例を簡単にまとめたものである。学校や生徒により多少反応は違うかもしれないが、参考にしていただければ幸いである。

図2は、授業の際に生徒にプロジェクターで見せる図である(この図は、フリーソフトGRAPESによって描かれている)。以下のような生徒とのやり取りをしながら画面上のグラフを動かして、言葉で表現された生徒の考えや感覚が、本当に正しいかどうかを具体的に授業の中で示していく。

以下の記号の意味は、次の通りである。

T：先生の説明

質問：先生の質問

「」生徒の発言

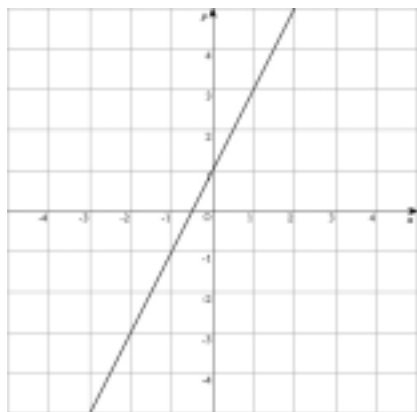


図2 $y = 2x + 1$

T：今日は、2次関数のグラフを扱います。
最初に、中学の時の復習をしましょう。

質問1： $y = ax + b$ で、 a とか b は、何だったで
しょうか？

「 a は、傾き、 b は切片です」

質問2： a は、大きくなるとグラフは、どうなり
ますか？

「グラフが急になってきます」

質問3： a が、小さくなるとグラフは、どうなり
ます？

「グラフが、ゆるやかになります」

質問4： a が負になったらグラフはどうなります
か？

「右下がりになります」

質問5： a を0にしたら、どうなるでしょう？

「 $y = 0$ 」

「横一直線」

「 $y = 1$ の直線です」

質問6： a を5から、 -5 まで変化させます。グラ
フがどのようになるか言ってみてください。
「急なグラフから、 $a = 0$ で $y = 1$ になって、
右下がりの急なグラフまで」

T：では、 a を5から -5 まで変化させます。よ
く観察しましょう。

T： $y = 2x + 1$, $y = 3$, $y = -x$, $y = -x - 2$ をプ
リントに描いてください。(まとめ)

学習した内容をプリントに記入し、確認する。

質問7： $y = a(x - p)^2 + q$ は、何でしょう？君た
ちは、これからこの関数を勉強することにな
ります。

黒板に、 $y = a(x - p)^2 + q$ の数式を書いて質問
する。

「全然。わかんない」

「みたことない」

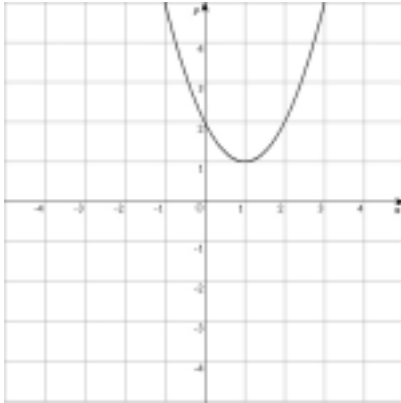


図3 $y = (x - 1)^2 + 1$

「傾きも切片も分からない」

「切片は、 q 」

T：では、

$$y = (x - 1)^2 + 1$$

をコンピュータで描いてみましょう(図3)。
 こういう形を「放物線」と言います。

図3は、 $y = a(x - p)^2 + q$ をコンピュータでプロジェクターに表示したところである。パラメータの a, p, q は、授業の中で適時動かし、生徒にグラフの動きとして提示する。その際に、生徒の学習が適切に発展できるような発問を行うことが大切である。

eラーニングでも、グラフを動かしてから、途中でグラフを止めて生徒に質問したり、止めて生徒に注目点を聞いたり、あるいは逆行させてもう一度確認させたりと色々な展開が可能である。

質問8：このグラフから、何か気づくことはありますか？

「直線じゃない」

「まるくなっている」

「下にとがってる」

「きれい」

「左右が同じ」

「 y 切片が1じゃない」

T：みんな、とても良いところに気づいていますね。

質問9： $y = a(x - p)^2 + q$ で、 a の値を変えると、グラフはどうなりますか？

「グラフの向きが変わる」

「グラフの形が変わる。どういう形か分からない」

T：それでは、 a を1から5まで変化させますので、よく観察しましょう。

質問10： a が大きくなると、グラフはどうなりますか？

「動いている」

「変！」

「形が、細くなります」

T： a を逆に0.1まで小さくします。

質問11： a の値を小さくすると、グラフはどうなりますか？

「ひろがっている」

「ふくらんでる」

「形がふとくなります」

質問12： a を0にすると、グラフはどうなりますか？

「わからない」

「うんとふくらむ」

「まっすぐだ」

「 x 軸に平行」

「 $y = 0$ 、直線になります」

$a = 0$ は、最初生徒には難しいのです。しかし、代入して計算すれば良いことに気付くと $y = 0$ つまり、直線が出ます。しかし、こうしたアプローチだけではなく、感覚的に「うんとふくらむ」等の反応もよく出ます。

質問13： a を負にすると、グラフはどうなりますか？

「わかりません」

T：それでは、 $a = -1, p = 0, q = 0$ の時のグラフを表で整理してプリントに描いて(プロットして)みてください。

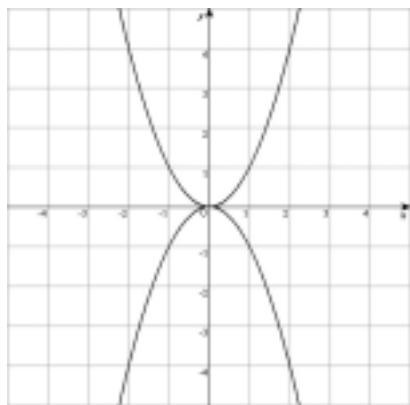


図4 $y = x^2$ と $y = -x^2$

生徒が、自分の手でグラフを描いて確認する。今までの活動からだけから $y = -x^2$ を予測するのは大変に困難である。そこで、グラフを描くときは、表で座標を計算してその座標をプロットしてグラフを描くという古典的な活動でイメージを持たせるようにする。自分で描いたグラフのイメージとコンピュータで動くイメージのつながりを丁寧に作れば、生徒の理解は構造的に深くなるのではないかと思われる。

図4は、 $y = x^2$ と $y = -x^2$ をプロジェクターに描き、生徒に提示した図である。

質問14： a を負にすると、グラフはどうなるでしょう？

「下にひるがります」

質問15： $y = x^2$ と $y = -x^2$ のグラフの形はどうですか？

「向きは違いますが、同じです」

T： それでは、 a を -5 まで小さくしますので、よく観察しましょう。

質問16： $y = (x + 1)^2 + 1$ と $y = x^2$ のグラフは、形は同じですか？

「同じです」

質問17： $y = 2(x + 1)^2 + 1$ と $y = x^2$ のグラフは、形は同じですか？

「違います」

質問18： どう違うのですか？

「片方は、細くなってます」

T： それでは、 $y = (x + 1)^2 + 1$ と $y = x^2$ のグラフは、形が同じなので形1のグラフと呼びましょう。

質問19： 形1のグラフの特徴を教えてください。

「とがった所から、1ずれて1あがってます」

質問20： 形2のグラフの特徴を教えてください。

「とがった所から、1ずれて2あがってます」

T： とがったところの名前がないと不便ですね。ここを放物線の「頂点」と呼んでいます。

放物線の頂点という言葉は、あえて教えていない。しかし、名前のないこの点に注目しながらコミュニケーションをとっていると不便なので、生徒は頂点を命名する必要性を感じてくる。そのときに、ここは実は頂点と呼ばれていると教えると生徒の表情は満足感に満ちている。

T： それでは、 $y = (x + 1)^2 + 1$ と $y = x^2$ のグラフは、形が本当に同じかどうかコンピュータで確かめてみましょう。(p と q を移動させて重ねてみる)

質問21： $y = a(x - p)^2 + q$ で、 a の値はどういう役割をしていますか？

「形を決めています」

「 p, q がどうであっても、形が同じです」

「向きが分かります」

T： それでは、 $y = x^2$ 、 $y = x^2 - 1$ 、 $y = 2x^2 + 1$ のグラフをプリントに描いて(プロット)ください。(まとめ)

生徒が、自分の手でグラフを描いて確認する。

質問22： $y = a(x - p)^2 + q$ で、 p, q はどういう働きをしていますか？

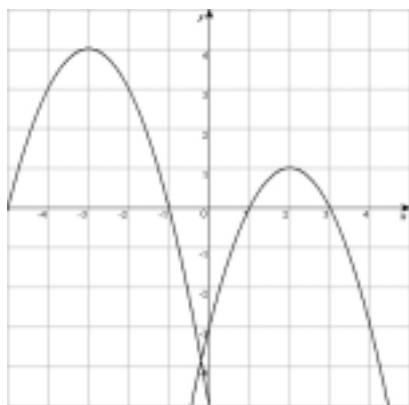


図5 $y = -(x - 2)^2 + 1$ と
 $y = -(x + 3)^2 + 4$

「 p は x 軸の向き、 q は y 軸の向きを表しています」

T : $y = -(x - 2)^2 + 1$ と $y = -(x + 3)^2 + 4$ のグラフをプリントに描いてみましょう。

図5は、 $y = -(x - 2)^2 + 1$ と $y = -(x + 3)^2 + 4$ をプロジェクターに描き、生徒に提示した図である。

質問23 : $y = a(x - p)^2 + q$ で、 p の値はどういう役割をしていますか？

「頂点の x 座標です」

画面上で、 p を動かしながら生徒に質問する。
 p の変化とグラフの動きに気づくと正しい結論を表現できる。

質問24 : $y = a(x - p)^2 + q$ で、 q の値はどういう役割をしていますか？

「頂点の y 座標です」

画面上で、 q を動かしながら生徒に質問する。

質問25 : $y = -(x - 2)^2 + 1$ を言葉で表現するとどうなりますか？

「形 - 1の放物線で頂点は(2, 1)です」

質問26 : $y = -(x - 2)^2 + 1$ をどうすれば、
 $y = -(x + 3)^2 + 4$ のグラフに重なりますか？

「横に5、縦に3移動させれば良いと思います」

質問27 : $y = a(x - p)^2 + q$ で a, p, q はそれぞれ何を表しているでしょう？

「 a は放物線の形を表し、 p と q は頂点の x 座標と y 座標を表しています」

T : それでは、このことをプリントのまとめ欄に書いておきましょう。(最後のまとめ)

手で書いて確認することは、大切である。経験的にコンピュータによる学習は、とすれば、浅くスムーズに進むことがある。この場合は、活動中は楽しいのだが、後に残らない授業となってしまう。そこで私の場合は、プリントを用意して、生徒に学習内容を必ず記入して学習の確認をするようにしている。

3. おわりに

本実践は、生徒と教師が数学のコミュニケーションをとる道具としてコンピュータを活用した一例である。こうした授業の文脈では、数学の概念を様々な形で確認し、生徒の数学の理解を深めることになると考えられる。数学のコミュニケーションでは、生徒から様々な事を教師も学べる。今の質問は良くなかったとか、こうすると生徒の発想は出てくるとか、日々改善の実践となる。単に生徒にコンピュータによる画面を見せただけでは、生徒はその内容を十分に受け取れないことがある。教師は、生徒がコンピュータによる刺激をきちんと受け止めているかどうかをおさえつつ、コンピュータ等を教育に応用することが大切である。本稿では、2次関数の授業にコンピュータを活用する例を紹介したが、数学では他に、微積分・三角関数や恒等式等でもコンピュータを活用した授業を行っている。また、教科「情報」においてもeラーニングの教材を開発して授業活性化のための試みを行っている。私は、生徒が生き生きと思考活動を展開できるような授業を様々な分野で今後も創造できることを切に願っている。

参考文献

1) 古藤泰弘『授業の方法と心理』学文社、2000年(p.57～58)