5　余弦定理

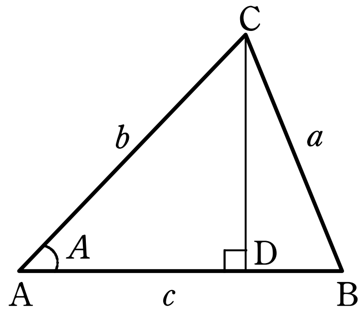
A　余弦定理

目標　余弦定理を用いて，三角形の辺の長さや角の大きさが求められるようになろう。
（p.171　練習 26　練習 28）

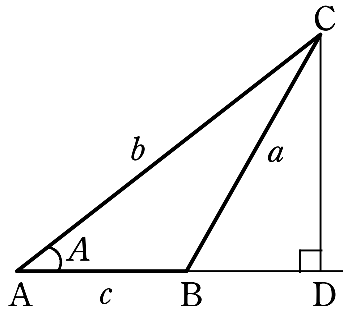
△ABC の 1 辺の長さ a について，a^2 を A を用いて表してみよう。

まず，下の図 [1]，[2]，[3] のように，A が鋭角の場合について調べる。△ABC の頂点 C から辺 AB またはその延長上に垂線 CD を下ろす。

[1]　B が鋭角の場合



[2]　B が鈍角の場合



[3]　B が直角の場合

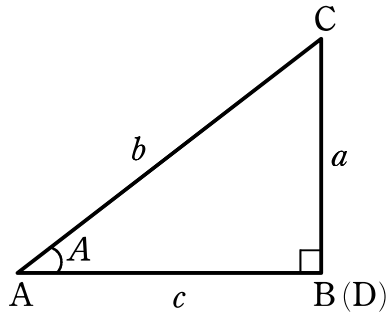


図 [1]，[2]，[3] では，いずれの場合にも次が成り立つ。

$\mathrm{BC}^2=$ $\boxed{}$

$\mathrm{CD}^2=$ $\boxed{}$

$\mathrm{BD}^2=$ $\boxed{}$

よって，BC^2 すなわち a^2 は次のように表される。

$a^2=$ $\boxed{}$

$=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A$

$=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A$

$=b^2+c^2-2bc\cos A$

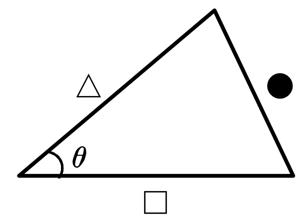
前ページで示した　$a^2=b+c^2-2bc\cos A$　は，A が直角の場合にも成り立つ。A が直角の場合は三平方の定理 $a^2=b^2+c^2$ になる。

練習 25　$a^2=b+c^2-2bc\cos A$ は，A が鈍角の場合にも成り立つ。

深める　このことは，前ページの A が鋭角の場合と同様に，BC^2，CD^2，BD^2 を考えることで証明することができる。鈍角の場合についての証明を完成させよ。

以上により，次の **余弦定理** が得られる。

> **余弦定理**
> △ABC において，次が成り立つ。
> $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
> $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
> $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



●^{2}＝△^{2}＋□$^2-2$△□$\cos\theta$

余弦定理を用いて，三角形の辺の長さを求めてみよう。

例題 4　△ABC において，$b=\sqrt{3}$，$c=2$，$A=150^\circ$ のとき，a を求めよ。

解答　余弦定理により

$$a^2=\boxed{}$$
$$=(\sqrt{3})^2+2^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cos 150^\circ$$
$$=3+4-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\boxed{}$$

$a>0$ であるから　　$a=\boxed{}$

【？】余弦定理を利用して，三角形のある辺の長さが求められるのは，どの角の大きさ，どの辺の長さがわかっているときだろうか。

練習 26　次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

目標

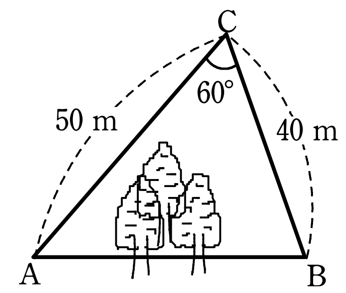
□

(1)　$a=3$，$c=2\sqrt{2}$，$B=45^\circ$ のとき　b

(2)　$a=3$，$b=5$，$C=120^\circ$ のとき　c

余弦定理を活用して，直接測ることのできない距離を求めてみよう。

練習 27　右の図のように，林をはさんで 2 地点 A，B がある。地点 C から A と B を見て ∠ACB を測ると 60° であり，A，C 間の距離は 50 m，B，C 間の距離は 40 m であった。A，B 間の距離を求めよ。



余弦定理から，△ABC において，次の等式が成り立つ。

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

この等式を用いて，三角形の角の大きさを求めてみよう。

例題 5　△ABC において，$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{7}$ のとき，C を求めよ。

解答　余弦定理により

$$\cos C=\boxed{}$$

$$=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 3\cdot 2}=\boxed{}$$

よって　$C=\boxed{}$

【？】余弦定理を利用して，三角形のある角の大きさが求められるのは，どの辺の長さがわかっているときだろうか。

練習 28　次のような △ABC において，指定されたものを求めよ。

目標 □

(1)　$a=\sqrt{7}$，$b=1$，$c=2\sqrt{3}$ のとき　A

(2)　$a=1$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{2}$ のとき　B