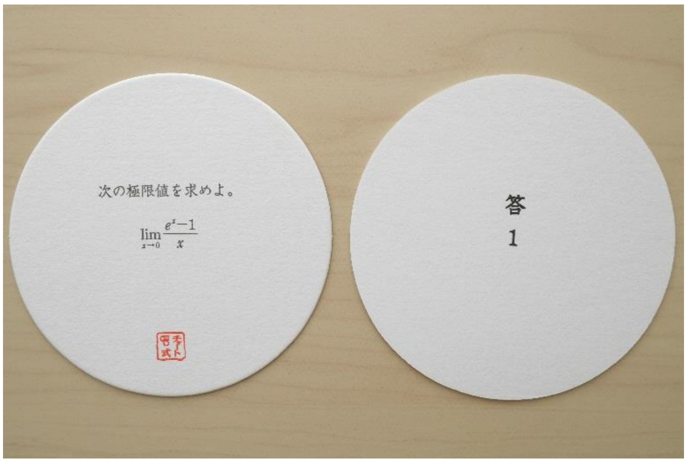
チャート式の　数研オリジナルグッズ
コースター　問題＋解答：極限編　説明・解説

第１問



数学界では言わずと知れた有名な式。そう、**ネイピア数 $\boldsymbol{e}$** の定義式です。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

eは無理数で、$e=2.71828182845\cdots\cdots$であることが知られています。
ちなみに、この式は公式として利用できます。

第２問

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ は $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots$ と無限に続く足し算を表しています。

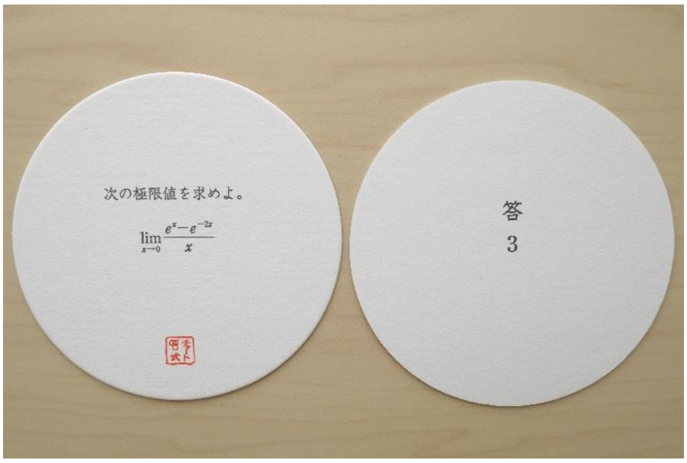
初項$a=1$、公比$r=\frac{1}{2}$の無限等比級数であり、$|r|<1$ なので収束し、その和は

$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$　　≺ 公式$\frac{a}{1-r}$を用いた。

となります。

チャート式の　数研オリジナルグッズ
コースター　問題＋解答：極限編　説明・解説

第 3 問



これは第 1 問の式、$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ を用いる問題です。

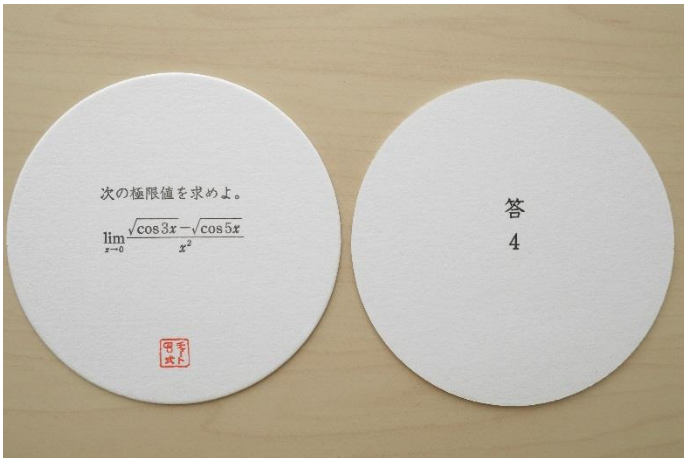
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1) - (e^{-2x} - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \underline{\frac{e^x - 1}{x}} - (-2) \underline{\frac{e^{-2x} - 1}{-2x}} \right\}$$

$$= 1 - (-2) \cdot 1 = 3$$ ◀ 下線部に第 1 問の式を用いた。

第 4 問



三角関数の極限に関する重要な公式、$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を用いる問題です。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos 3x} - \sqrt{\cos 5x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2\left(\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos 5x}\right)}$$
∢分子を有理化した。

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\sin x}{x^2\left(\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos 5x}\right)}$$
∢和 → 積の公式、$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ を用いた。

$$= \lim_{x\to 0}\underline{\frac{\sin 4x}{4x}}\cdot 4\cdot\underline{\frac{\sin x}{x}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos 5x}}$$

$$= 1\cdot 4\cdot 1\cdot\frac{2}{2}=4$$
∢下線部に三角関数の極限の公式、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いた。

第 5 問

$$\lim_{x\to\infty}(2^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[5^x\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}5\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x=0$、$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから　$\lim_{x\to\infty}(2^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=5(0+1)^0=5$

ちなみに、この問題は「はさみうちの原理」を利用しても求めることができます。

いかがでしたか？ご覧頂き、ありがとうございました。
文系の皆さんはもちろん、理系の皆さんにも少し難しい問題もあったかもしれません。
少しでも数学の楽しさ・不思議さ・美しさを感じて頂けたなら、幸いです。

あ な た は す べ て 、 解 け ま す か ？