

内容見本用 目次

実際の書籍には、これと同内容のものが表紙裏に入ります。

ページ	項目名	ページ	項目名
1	多項式の計算	37	不等式の証明
2	展開の公式	38	2数を解とする2次方程式
3	因数分解	39	2次方程式の解と数の大小
4	平方根と式の値	40	余りの決定
5	絶対値を含む方程式	41	高次方程式
6	必要条件と十分条件	42	直線に関して対称な点
7	命題の証明と対偶	43	円の接線
8	2次関数のグラフ	44	軌 跡
9	2次関数の最大・最小	45	領域と最大・最小
10	2次関数の決定	46	三角関数の最大・最小
11	2次不等式の応用 (1)	47	2直線のなす角
12	2次不等式の応用 (2)	48	三角関数の不等式(合成利用)
13	三角比の相互関係	49	指数・対数の計算
14	正弦定理・余弦定理	50	指数・対数の方程式・不等式
15	三角形の面積	51	桁数, 小数首位
16	円に内接する四角形 (三角比)	52	曲線外の点を通る接線
17	空間図形への応用	53	極値から関数の決定
18	順列・円順列	54	方程式の実数解の個数
19	最短経路の数	55	不等式の証明
20	組分け	56	定積分の値と関数の決定
21	確 率 (1)	57	定積分で表された関数
22	確 率 (2)	58	面 積
23	反復試行の確率	59	面積の2等分
24	三角形の内心	60	等差数列
25	円周角の定理	61	等比数列
26	円に内接する四角形	62	分数の数列の和
27	接線と弦の作る角	63	群数列
28	方べきの定理	64	階差数列
29	連続する整数の性質	65	漸化式(おき換え)
30	文字式と最大公約数	66	数学的帰納法
31	分数方程式の自然数解	67	ベクトルの大きさの最小値
32	n進数から自然数の決定	68	ベクトルのなす角
33	二項定理	69	交点の位置ベクトル
34	多項式の割り算, 恒等式	70	垂直な単位ベクトル
35	等式の証明	71	直線と平面の交点とベクトル
36	比例式の値	72	平面に下ろした垂線の足の座標

1 多項式の計算

数学 I

/ 50

★★

1 《例題》 (1) $A = -x^2 + 3x + 2$, $B = 2x^2 + x - 3$, $C = 3x^2 - 4x - 5$ であるとき,
 $2A - \{B + (A - 2C)\}$ を計算せよ。

〔東北生活文化大〕

(2) $-\frac{1}{3}x^2y^3 \times (-6x^2y)^2$ を計算せよ。

〔東京家政大〕

【解答】 (1) $2A - \{B + (A - 2C)\} = 2A - B - (A - 2C) = 2A - B - A + 2C$
 $= A - B + 2C$
 $= (-x^2 + 3x + 2) - (2x^2 + x - 3) + 2(3x^2 - 4x - 5)$
 $= -x^2 + 3x + 2 - 2x^2 - x + 3 + 6x^2 - 8x - 10$
 $= 3x^2 - 6x - 5$ 答

(2) $-\frac{1}{3}x^2y^3 \times (-6x^2y)^2 = -\frac{1}{3}x^2y^3 \times (-6)^2(x^2)^2y^2 = -\frac{1}{3}x^2y^3 \times 36x^4y^2$
 $= -12x^6y^5$ 答

【類題】 (1) $A = x^2 + 2x - 1$, $B = -3x + 2 - 4x^2$, $C = 5 - 3x^2$ であるとき, $A - \{B - 2(2A + C)\}$

を計算せよ。(30 点)

〔山梨学院大〕

(2) $(2x^3y)^2 \times (-4x^2y^3)^3$ を計算せよ。(20 点)

〔東邦学園大〕

2 展開の公式

数学 I

/ 50

★★

2 《例題》 次の式を展開せよ。

(1) $(3x - 2y + z)^2$

(2) $(a^2 - 4ab + b^2)(a^2 + 4ab + b^2)$

(3) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$

解答 (1) $(3x - 2y + z)^2 = \{(3x - 2y) + z\}^2 = (3x - 2y)^2 + 2(3x - 2y)z + z^2$

$$= (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 + 6xz - 4yz + z^2$$

$$= 9x^2 - 12xy + 4y^2 + 6xz - 4yz + z^2$$

$$= 9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12xy - 4yz + 6zx \quad \text{答}$$

(2) $(a^2 - 4ab + b^2)(a^2 + 4ab + b^2) = \{(a^2 + b^2) - 4ab\}\{(a^2 + b^2) + 4ab\}$

$$= (a^2 + b^2)^2 - (4ab)^2 = (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - 16a^2b^2$$

$$= a^4 - 14a^2b^2 + b^4 \quad \text{答}$$

(3) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = (x + 1)(x + 4) \times (x + 2)(x + 3) \quad \leftarrow \text{掛ける組み合わせを工夫}$

$$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = \{(x^2 + 5x) + 4\}\{(x^2 + 5x) + 6\}$$

$$= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24$$

$$= x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x^2 + 50x + 24$$

$$= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 \quad \text{答}$$

類題 次の式を展開せよ。(1)(2) 各 15 点 (3) 20 点

(1) $\{(-x)^3 - y + z\}^2$

(2) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 3x + 2)$

(3) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4)$

3 因数分解

数学 I

/ 50

★★

3 《例題》 次の式を因数分解せよ。

(1) $6x^2 + 7xy + 2y^2 + x - 2$

(2) $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4) + 24$

(3) $xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz$

解答 (1) $6x^2 + 7xy + 2y^2 + x - 2$

$$= 6x^2 + (7y+1)x + 2(y^2-1)$$

$$= 6x^2 + (7y+1)x + 2(y+1)(y-1)$$

$$= \{2x + (y-1)\}\{3x + 2(y+1)\}$$

$$= (2x + y - 1)(3x + 2y + 2) \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{rcl}
 2 & \times & y-1 \rightarrow 3y-3 \\
 3 & & 2(y+1) \rightarrow 4y+4 \\
 \hline
 6 & & 2(y+1)(y-1) \quad 7y+1
 \end{array}$$

(2) $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4) + 24$

$$= (x-3)(x+4) \times (x-1)(x+2) + 24 \quad \leftarrow \text{掛ける組み合わせを工夫}$$

$$= (x^2 + x - 12)(x^2 + x - 2) + 24 = (x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 48$$

$$= (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 8) = (x+3)(x-2)(x^2 + x - 8) \quad \text{答}$$

(3) $xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 2xyz$

$$= x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 2xyz$$

$$= (y+z)x^2 + (y^2 + 2yz + z^2)x + yz(y+z) \quad \leftarrow x \text{ について整理}$$

$$= (y+z)x^2 + (y+z)^2x + yz(y+z) = (y+z)\{x^2 + (y+z)x + yz\}$$

$$= (y+z)(x+y)(x+z) = (x+y)(y+z)(z+x) \quad \text{答}$$

類題 次の式を因数分解せよ。(1)(2) 各 15 点 (3) 20 点

(1) $3x^2 - 4y^2 + 4xy - 8x + 8y - 3$

(2) $(x-1)(x+1)(x+4)(x+6) - 24$

(3) $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

4 平方根と式の値

数学 I

/ 50

★★

4 《例題》 (1) $a = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $b = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき, a^2+b^2 , a^3+b^3 の値を求めよ。

(2) $\frac{2}{\sqrt{6}-2}$ の整数部分を a , 小数部分を b とするとき, $a^2+4ab+4b^2$ の値を求めよ。

[(1) 類 関東学院大 (2) 北海学園大]

【解答】 (1) $a+b = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$ ← 通分すると, 分母が有理化される。

$$= \frac{(5-2\sqrt{6}) + (5+2\sqrt{6})}{3-2} = 10$$

$$ab = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 1$$

$$\text{よって } a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 10^2 - 2 \cdot 1 = 98 \quad \text{答}$$

$$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 10^3 - 3 \cdot 1 \cdot 10 = 970 \quad \text{答}$$

$$(2) \frac{2}{\sqrt{6}-2} = \frac{2(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \frac{2(\sqrt{6}+2)}{6-4} = \sqrt{6}+2$$

$$2 < \sqrt{6} < 3 \text{ であるから } 4 < \sqrt{6}+2 < 5 \quad \text{よって } a=4, \quad b=(\sqrt{6}+2)-a=\sqrt{6}-2$$

$$\text{したがって } a^2+4ab+4b^2 = (a+2b)^2 = \{4+2(\sqrt{6}-2)\}^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24 \quad \text{答}$$

【類題】 (1) $a = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ のとき, a^2-b^2 , a^3+b^3 の値を求めよ。(30点)

(2) $\frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とするとき, $a+\frac{1}{b}$ の値を求めよ。(20点)

[(1) 京都産大 (2) 名古屋経大]

5 絶対値を含む方程式

数学 I

/ 50

★★

5 《例題》 方程式 $2|x| + 2|x-2| = 3x + 10$ を解け。

[類 近畿大]

解答 [1] $x < 0$ のとき $|x| = -x$, $|x-2| = -(x-2)$
 よって、方程式は $-2x - 2(x-2) = 3x + 10$ すなわち $7x + 6 = 0$
 これを解いて $x = -\frac{6}{7}$ これは $x < 0$ を満たす。

[2] $0 \leq x < 2$ のとき $|x| = x$, $|x-2| = -(x-2)$
 よって、方程式は $2x - 2(x-2) = 3x + 10$ すなわち $3x + 6 = 0$
 これを解いて $x = -2$ これは $0 \leq x < 2$ を満たさない。

[3] $2 \leq x$ のとき $|x| = x$, $|x-2| = x-2$
 よって、方程式は $2x + 2(x-2) = 3x + 10$ すなわち $x - 14 = 0$
 これを解いて $x = 14$ これは $2 \leq x$ を満たす。

したがって、解は $x = -\frac{6}{7}, 14$ 答

類題 方程式 $|x| + 2|x-1| = x + 3$ を解け。

[明治大]

6 必要条件と十分条件

数学 I

/ 50

★★

6 《例題》 次の ☐ にあてはまるものを下の ① ~ ④ の中から選べ。(1) 実数 a, b について, $a > 0$ かつ $b > 0$ は, $ab > 0$ であるための ア ☐。(2) 2 つの三角形の面積が等しいことは, それらが合同であるための イ ☐。

① 必要条件であるが十分条件でない

② 十分条件であるが必要条件でない

③ 必要十分条件である

④ 必要条件でも十分条件でもない

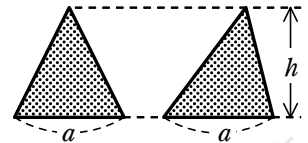
[(2) 大東文化大]

解答 (1) $a > 0$ かつ $b > 0$ のとき $ab > 0$ よって, 「 $a > 0$ かつ $b > 0 \Rightarrow ab > 0$ 」は真である。また, $ab > 0$ のとき ($a > 0$ かつ $b > 0$) または ($a < 0$ かつ $b < 0$)よって, 「 $ab > 0 \Rightarrow a > 0$ かつ $b > 0$ 」は偽である。(反例: $a = -1, b = -2$)ゆえに, $a > 0$ かつ $b > 0$ は, $ab > 0$ であるための十分条件であるが必要条件でない。図 ア ②

(2) 2 つの三角形の面積が等しいとき, それらが合同とは限らない。(反例: 右図)

また, 合同な 2 つの三角形は明らかに面積が等しい。

ゆえに, 2 つの三角形の面積が等しいことは, それらが

合同であるための必要条件であるが十分条件でない。 図 イ ①類題 次の ☐ にあてはまるものを《例題》の ① ~ ④ の中から選べ。(25 点×2)(1) 実数 x, y について, $xy < 0$ は, $x^2 + y^2 > 0$ であるための ア ☐。(2) 半径 5 の円に内接する $\triangle ABC$ について, $BC = 10$ は, $\angle BAC = 90^\circ$ であるための イ ☐。

[(1) 愛知学泉大, (2) 関東学院大]

7 命題の証明と対偶

数学 I

/ 50

★★

7 《例題》 n を整数とする。命題「 n^2 が 5 の倍数ならば n は 5 の倍数である」…… ① の対偶を書け。

また、命題 ① が真であることを示せ。

[公立はこだて未来大]

【解答】 対偶は 「 n が 5 の倍数でないならば n^2 は 5 の倍数でない」…… ② 〔答〕

n が 5 の倍数でないならば、 n は $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$ (k は整数) のどれかで表される。

$$[1] \quad n=5k+1 \text{ のとき} \quad n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1$$

$$[2] \quad n=5k+2 \text{ のとき} \quad n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$$

$$[3] \quad n=5k+3 \text{ のとき} \quad n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$$

$$[4] \quad n=5k+4 \text{ のとき} \quad n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$$

いずれの場合も、 n^2 は 5 の倍数でない。

よって、② は真である。

対偶が真であるから、命題 ① は真である。 〔終〕

【類題】 次の命題を問いにしたがって証明せよ。ただし、 a は整数とする。

「 a^2 が 3 の倍数ならば、 a は 3 の倍数である」

(1) この命題の対偶をいえ。(10 点)

(2) 対偶を証明せよ。(40 点)

[獨協大]

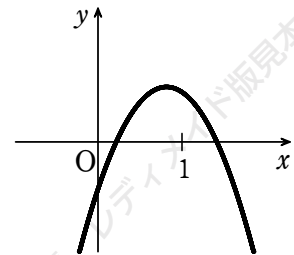
8 2次関数のグラフ

数学 I

/ 50

★★

8 《例題》 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようになっているとき、 a 、 b 、 c 、および $a + b + c$ の符号をいえ。 [類 明海大]



解答 グラフが上に凸であるから $a < 0$ 答

$y = ax^2 + bx + c$ を変形すると

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

よって、軸は 直線 $x = -\frac{b}{2a}$ 軸の位置から $-\frac{b}{2a} > 0$

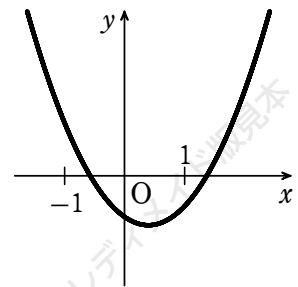
$a < 0$ であるから $b > 0$ 答

グラフは y 軸と点 $(0, c)$ で交わるから $c < 0$ 答

また、 $x = 1$ のとき $y = a + b + c$ で、グラフから $a + b + c > 0$ 答

類題 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようになっているとき、 a 、 b 、 c 、および $a + b + c$ 、 $a - b + c$ の符号をいえ。

[奈良産大]



9 2次関数の最大・最小

数学 I

/ 50

★★

9 《例題》 a は定数とする。2 次関数 $y = x^2 - 2ax + 2a + 1$ の $0 \leq x \leq 3$ における最小値を m とする。

(1) $a < 0$ のとき $m = \text{ア}$

(2) $0 \leq a < 3$ のとき $m = \text{イ}$

(3) $3 \leq a$ のとき $m = \text{ウ}$

[愛知学泉大]

解答

$$y = x^2 - 2ax + 2a + 1 = (x^2 - 2ax + a^2) - a^2 + 2a + 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a + 1$$

ゆえに、この関数のグラフは、軸が直線 $x = a$ で、下に凸の放物線である。

(1) $a < 0$ のとき $0 \leq x \leq 3$ におけるグラフは [図 1] の実線部分のようになる。

よって、 y は $x = 0$ で最小となり、その最小値 m は $m = \text{ア}$ $2a + 1$ 答

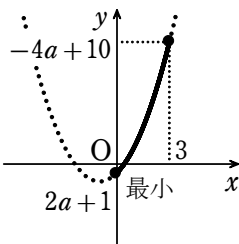
(2) $0 \leq a < 3$ のとき $0 \leq x \leq 3$ におけるグラフは [図 2] の実線部分のようになる。

よって、 y は $x = a$ で最小となり、その最小値 m は $m = \text{イ}$ $-a^2 + 2a + 1$ 答

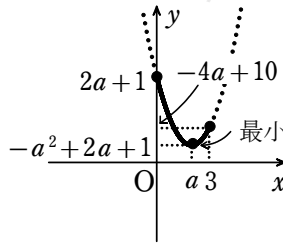
(3) $3 \leq a$ のとき $0 \leq x \leq 3$ におけるグラフは [図 3] の実線部分のようになる。

よって、 y は $x = 3$ で最小となり、その最小値 m は $m = \text{ウ}$ $-4a + 10$ 答

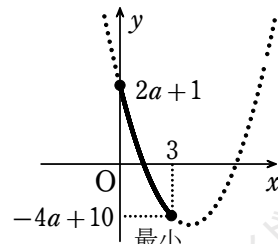
[図 1]



[図 2]



[図 3]



類題 a は定数とする。2 次関数 $y = -x^2 + 2ax + 4a + 4$ の $-1 \leq x \leq 3$ における最大値を M とする。(1) 15 点 (2) 20 点 (3) 15 点

(1) $a < -1$ のとき $M = \text{ア}$

(2) $-1 \leq a < 3$ のとき $M = \text{イ}$

(3) $3 \leq a$ のとき $M = \text{ウ}$

[中部大]

10 2次関数の決定

数学 I

/ 50

★★

10 《例題》 (1) 放物線 $y = -x^2 + ax - b$ は点 (2, 1) を通り、頂点が直線 $y = 2x - 4$ 上にある。このとき、 a, b の値を求めよ。 [中京大]

(2) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に 3 だけ平行移動すると、放物線 $y = x^2 + x + 1$ になるという。定数 a, b の値を求めよ。 [北海学園大]

【解答】 (1) 放物線が点 (2, 1) を通るから $1 = -2^2 + a \cdot 2 - b$ すなわち $b = 2a - 5$ …… ①

$$\text{また, } y = -x^2 + ax - b \text{ を変形すると } y = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - b$$

$$\text{よって, 頂点の座標は } \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} - b\right)$$

$$\text{これが直線 } y = 2x - 4 \text{ 上にあるから } \frac{a^2}{4} - b = 2 \cdot \frac{a}{2} - 4 \text{ …… ②}$$

$$\text{① を ② に代入して整理すると } a^2 - 12a + 36 = 0$$

$$\text{よって } (a - 6)^2 = 0 \quad \text{ゆえに } a = 6$$

$$\text{① に代入して } b = 2 \cdot 6 - 5 = 7 \quad \text{したがって } a = 6, b = 7 \quad \text{答}$$

(2) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に -3 だけ平行移動すると

$$y + 3 = (x + 2)^2 + (x + 2) + 1 \quad \text{逆の移動を考える。}$$

$$\text{すなわち } y = x^2 + 5x + 4 \quad \text{したがって } a = 5, b = 4 \quad \text{答}$$

【類題】 (1) 放物線 $y = -x^2 + 2ax - 8$ の頂点が放物線 $y = 2x^2 + x - 10$ 上にあるとき、 a の値を求めよ。(30 点) [石巻専修大]

(2) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ を x 軸方向に -1 , y 軸方向に -2 だけ平行移動すると、放物線 $y = x^2 - 4x + 2$ になるという。定数 a, b の値を求めよ。(20 点) [拓殖大]

1 1 2 次不等式の応用 (1)

数学 I

/ 50

★★

11 《例題》 (1) $ax^2 + x + b > 0$ の解が $-1 < x < 2$ となるように、定数 a, b の値を定めよ。(2) 2 次不等式 $x^2 - 2kx + 4(k+3) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つとき、 k のとりうる値の範囲を求めよ。
[(1) 倉敷芸科大 (2) 国士舘大]解答 (1) 条件から、 $y = ax^2 + x + b$ のグラフは上に凸の放物線で、2 点 $(-1, 0), (2, 0)$ を通るから

$$a < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1},$$

$$a - 1 + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad 4a + 2 + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②, ③ から $a = -1, b = 2$ 図 これは①を満たす。別解 $-1 < x < 2$ を解にもつ 2 次不等式は $(x+1)(x-2) < 0$

$$\text{すなわち} \quad x^2 - x - 2 < 0$$

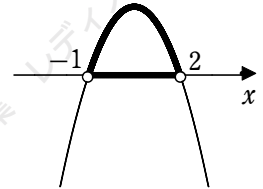
$$\text{両辺に } -1 \text{ を掛けて} \quad -x^2 + x + 2 > 0$$

$$ax^2 + x + b > 0 \text{ と係数を比較して} \quad a = -1, b = 2 \quad \text{図}$$

(2) 2 次方程式 $x^2 - 2kx + 4(k+3) = 0$ の判別式を D とすると、2 次不等式 $x^2 - 2kx + 4(k+3) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つための条件は

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 4(k+3) < 0$$

$$\text{よって} \quad (k+2)(k-6) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad -2 < k < 6 \quad \text{図}$$

類題 (1) 2 次不等式 $ax^2 + bx + 3 > 0$ の解が $-1 < x < 3$ であるとき、 a, b の値を求めよ。(30 点)(2) 不等式 $x^2 - 2x \geq kx - 4$ の解がすべての実数であるような定数 k の値の範囲を求めよ。(20 点)

[(1) 高岡法科大 (2) 金沢工大]

1 2 2 次不等式の応用 (2)

数学 I

/ 50

★★

12 《例題》 2 次方程式 $x^2 - kx - k + 8 = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつように、定数 k の値の範囲を定めよ。

[千葉経大]

【解答】 $f(x) = x^2 - kx - k + 8$ とおくと

$$f(x) = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} - k + 8$$

よって、 $y = f(x)$ のグラフの軸は 直線 $x = \frac{k}{2}$

2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつことは、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わることと同じで、そのための条件は

$$D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k + 8) > 0 \quad \cdots \cdots ①$$

$$\text{軸について } \frac{k}{2} > 0 \quad \cdots \cdots ②, \quad f(0) = -k + 8 > 0 \quad \cdots \cdots ③$$

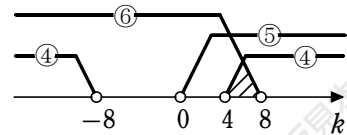
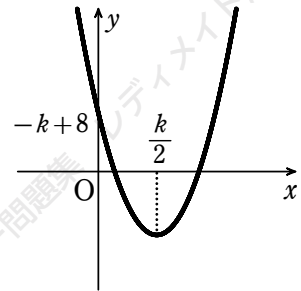
$$① \text{ から } k^2 + 4k - 32 > 0 \quad \text{よって} \quad (k + 8)(k - 4) > 0$$

$$\text{ゆえに } k < -8, 4 < k \quad \cdots \cdots ④$$

$$② \text{ から } k > 0 \quad \cdots \cdots ⑤$$

$$③ \text{ から } k < 8 \quad \cdots \cdots ⑥$$

$$④, ⑤, ⑥ \text{ の共通範囲を求めて } 4 < k < 8 \quad \text{答}$$



【類題】 2 次方程式 $x^2 - ax + 3a - 5 = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。

[摂南大]

1 3 三角比の相互関係

数学 I

/ 50

★★

13 《例題》 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta$, $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ の値を求めよ。

[名城大]

解答 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ であるから } 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって } \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \quad \text{答}$$

$$\text{また } \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{8} \right) \right\} = \frac{11}{16} \quad \text{答}$$

類題 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ であるとき, $\sin \theta \cos \theta$, $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ の値を求めよ。

[埼玉工大]

1 4 正弦定理・余弦定理

数学 I

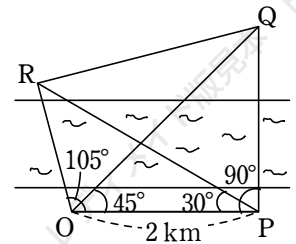
50

★★

14

《例題》 川の向こうにある 2 地点 R, Q の距離を求めるために、
2 km 離れた 2 地点 O, P において、 $\angle ROP$, $\angle QOP$, $\angle RPO$,
 $\angle QPO$ を測定すると右の図のような値が得られた。このとき、R,
Q 間の距離を求めよ。

[南九州大]



【解答】 $\angle QOP = 45^\circ$, $\angle QPO = 90^\circ$ であるから、 $\triangle QOP$ は直角

二等辺三角形である。よって $OQ = \sqrt{2}OP = 2\sqrt{2}$

また $\angle ORP = 180^\circ - (\angle ROP + \angle RPO) = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$

$\triangle OPR$ において、正弦定理により $\frac{OP}{\sin \angle ORP} = \frac{OR}{\sin \angle RPO}$

よって $OR = \frac{OP \sin \angle RPO}{\sin \angle ORP} = \frac{2 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 2 \times \frac{1}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

また $\angle QOR = \angle ROP - \angle QOP = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$

$\triangle QOR$ において、余弦定理により

$$QR^2 = OQ^2 + OR^2 - 2OQ \cdot OR \cos \angle QOR$$

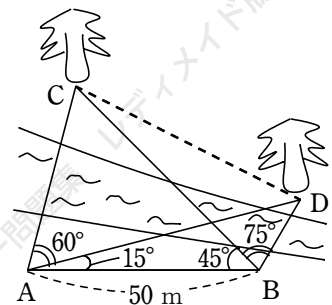
$$= (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos 60^\circ = 8 + 2 - 8 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

$QR > 0$ であるから $QR = \sqrt{6}$ (km) 〇

【類題】 川の対岸の 2 地点 C, D に 2 本の高い木が立っている。

川のこちら側の 50 m 離れた 2 地点 A, B と 2 本の木の角度を測量
したところ、図のようになった。C, D 間の距離を求めよ。ただし、
4 地点 A, B, C, D の標高は等しいとする。

[中部大]



1 5 三角形の面積

数学 I

/ 50

★★

15 《例題》 $\triangle ABC$ において、 $BC=2$ 、 $CA=3$ 、 $AB=4$ のとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。また、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を求めよ。

[武蔵大]

【解答】 $\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$\cos A = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8}$$

$$\sin A > 0 \text{ であるから } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

よって、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} CA \cdot AB \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \quad \text{答}$$

また、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r とすると

$$S = \frac{1}{2} (BC + CA + AB) r = \frac{1}{2} (2 + 3 + 4) r = \frac{9}{2} r$$

$$\text{ゆえに } \frac{9}{2} r = \frac{3\sqrt{15}}{4} \quad \text{したがって } r = \frac{\sqrt{15}}{6} \quad \text{答}$$

【類題】 $\triangle ABC$ において、 $AB=7$ 、 $BC=5$ 、 $CA=6$ のとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。また、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を求めよ。

[近畿大]

16 円に内接する四角形 (三角比)

数学 I

50

★★

16 《例題》 円に内接する四角形 ABCD は、 $AB=1$, $BC=2$, $CD=3$, $DA=4$ である。このとき、 $\cos \angle DAB$, 線分 BD の長さ, 四角形 ABCD の面積を求めよ。

[明海大]

【解答】 $\triangle ABD$ に余弦定理を適用して

$$BD^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cos \angle DAB = 17 - 8 \cos \angle DAB \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle CBD$ に余弦定理を適用して

$$BD^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos \angle BCD$$

$$= 13 - 12 \cos(180^\circ - \angle DAB) = 13 + 12 \cos \angle DAB \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } 17 - 8 \cos \angle DAB = 13 + 12 \cos \angle DAB$$

$$\text{よって } \cos \angle DAB = \frac{1}{5} \quad \text{答}$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } BD^2 = 17 - 8 \cdot \frac{1}{5} = \frac{77}{5} \quad BD > 0 \text{ であるから } BD = \sqrt{\frac{77}{5}} = \frac{\sqrt{385}}{5} \quad \text{答}$$

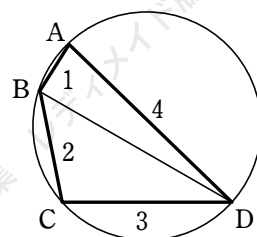
$$\sin \angle DAB > 0 \text{ であるから } \sin \angle DAB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle DAB} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{また } \sin \angle BCD = \sin(180^\circ - \angle DAB) = \sin \angle DAB = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

よって (四角形 ABCD の面積) = $\triangle ABD + \triangle CBD$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \angle DAB + \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin \angle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 2\sqrt{6} \quad \text{答}$$



【類題】 円に内接する四角形 ABCD がある。 $AB=3$, $BC=4$, $CD=DA=2$ のとき、 $\cos \angle B$, 線分 AC の長さ, 四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

[東京家政大]

1 7 空間図形への応用

★★ 17 《例題》 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において、辺 BC の中点を M、 $\angle AMD = \theta$ とする。

- (1) $\cos \theta$ を求めよ。 (2) 正四面体 ABCD の体積を求めよ。 [岐阜聖徳学園大]

解答 (1) $AM = DM = AB \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

よって、 $\triangle AMD$ において、余弦定理により

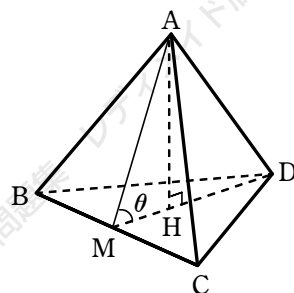
$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{AM^2 + DM^2 - AD^2}{2AM \cdot DM} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) (1) から $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

頂点 A から線分 DM に垂線 AH を下ろすと $AH = AM \sin \theta = \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

また、 $\triangle BCD$ の面積 S は $S = \frac{1}{2} BC \cdot BD \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

よって、求める正四面体 ABCD の体積 V は $V = \frac{1}{3} S \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{答}$



類題 三角錐 PABC において、 $AB = BC = CA = 1$ 、 $PA = PB = PC = 2$ であるものとする。

- (1) 三角錐 PABC の底面 ABC の面積を求めよ。(20 点)
 (2) 三角錐 PABC の体積を求めよ。(30 点) [中京学院大]

18 順列・円順列

数学A

50

★★

18 《例題》 両親と3人の子供が横1列に並ぶとき、両親が隣り合う並び方は何通りあるか。また、丸いテーブルの席に座るとき、両親が隣り合う並び方は何通りあるか。 [武蔵大]

【解答】 隣り合う両親2人をまとめて1人とみなし、4人を横1列に並べる方法は ${}_4P_4$ 通りある。

このおのおのの並び方に対して、両親2人の並び方は ${}_2P_2$ 通りある。

よって、求める並び方は

$${}_4P_4 \times {}_2P_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1 = 48 \text{ (通り)} \quad \text{答}$$

また、丸いテーブルの席に座るときも同様に考える。

4人が丸いテーブルの席に座るのは、 $(4-1)!$ 通りある。

このおのおのの座り方に対して、両親2人の並び方は ${}_2P_2$ 通りある。

よって、求める並び方は

$$(4-1)! \times {}_2P_2 = 3! \times {}_2P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1 = 12 \text{ (通り)} \quad \text{答}$$

【類題】 男子3人、女子2人を横1列に並べるとき、両端がともに男子である並び方は何通りあるか。また、この5人を円形に並べるとき、女子が隣り合わない並び方は何通りあるか。 [東亜大]

19 最短経路の数

数学A

/ 50

★★

19 《例題》 右図のような経路の町があり、ある人が最短距離の道順で、
A 地点から B 地点まで行くものとする。

(1) A 地点から B 地点に最短距離で行く道順は全部で何通りあるか。

(2) P, Q 両地点を通過する道順は全部で何通りあるか。 [広島工大]

【解答】 (1) 東に 1 区画進むことを →, 北に 1 区画進むことを ↑ で
表すと, A 地点から B 地点に最短距離で行く道順の総数
は, → 5 個と ↑ 4 個を 1 列に並べる順列の総数に等しい。

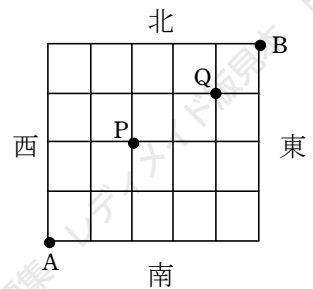
$$\text{よって } \frac{9!}{5!4!} = 126 \text{ (通り)} \quad \text{答}$$

(2) A 地点から P 地点に最短距離で行く道順は $\frac{4!}{2!2!} = 6$ (通り)

P 地点から Q 地点に最短距離で行く道順は $\frac{3!}{2!} = 3$ (通り)

Q 地点から B 地点に最短距離で行く道順は 2 通り

よって, P, Q 両地点を通過する道順は $6 \times 3 \times 2 = 36$ (通り) 答



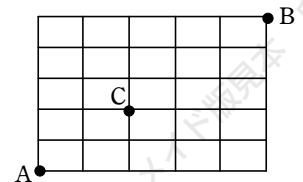
← (1) と同様に考える。

【類題】 右図のような碁盤の目になっている道路がある。

A から B に行く最短経路について

(1) 最短経路は全部で何通りあるか。(20 点)

(2) C を通らない最短経路は何通りあるか。(30 点) [類 神戸学院大]



20 組分け

数学 A

/ 50

★★

20 《例題》 9 人の子供を次のようにする方法は、何通りあるか。

(1) 5 人, 4 人の 2 組に分ける。 (2) 4 人, 3 人, 2 人の 3 組に分ける。

(3) 3 人ずつ A, B, C の 3 室に入れる。 (4) 3 人ずつの 3 組に分ける。 [東京経大]

【解答】 (1) 9 人の中から 5 人を選び出すと、5 人, 4 人の 2 組に分けられる。

よって、求める方法は ${}_9C_5 = {}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$ (通り) 答

(2) 9 人の中から 4 人を選び出し、残り 5 人の中から 3 人を選び出すと、4 人, 3 人, 2 人の 3 組に分けられる。

よって、求める方法は ${}_9C_4 \times {}_5C_3 = {}_9C_4 \times {}_5C_2 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 1260$ (通り) 答

(3) 9 人の中から 3 人を選び出して A に入れ、残り 6 人の中から 3 人を選び出して B に入れ、残りの 3 人を C に入れる。

よって、求める方法は ${}_9C_3 \times {}_6C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1680$ (通り) 答

(4) (3) で A, B, C の区別をなくすと、同じものが 3! 通りずつできる。

よって、求める方法は $\frac{1680}{3!} = \frac{1680}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 280$ (通り) 答

【類題】 6 冊の異なる本を次のようにする方法は、何通りあるか。

[大阪樟蔭女子大]

(1) 3 冊, 2 冊, 1 冊の 3 組に分ける。 (2) 3 冊, 2 冊, 1 冊を 3 人の子供に分ける。

(3) 2 冊ずつ 3 人の子供に分ける。 (4) 2 冊ずつ 3 組に分ける。

((1), (2) 各 10 点 (3), (4) 各 15 点)

2 1 確 率 (1)

数学 A

/ 50

★★

21 《例題》 赤玉 5 個, 白玉 4 個, 青玉 3 個が入っている袋から, よくかき混ぜて玉を同時に 3 個取り出す。

- (1) 3 個とも赤玉である確率を求めよ。
- (2) 3 個とも色が異なる確率を求めよ。
- (3) 3 個の玉の色が 2 種類である確率を求めよ。

[岐阜大]

解答 (1) 赤玉 5 個から 3 個を取り出す場合であるから, 求める確率は $\frac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{1}{22}$ 圈

(2) 赤玉, 白玉, 青玉をそれぞれ 1 個ずつ取り出す場合であるから, 求める確率は

$$\frac{{}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{3}{11} \quad \text{圈}$$

(3) [1] 赤玉と白玉を取り出す場合の数は

$${}_5C_2 \times {}_4C_1 + {}_5C_1 \times {}_4C_2 = 40 + 30 = 70 \quad (\text{通り})$$

[2] 赤玉と青玉を取り出す場合の数は

$${}_5C_2 \times {}_3C_1 + {}_5C_1 \times {}_3C_2 = 30 + 15 = 45 \quad (\text{通り})$$

[3] 白玉と青玉を取り出す場合の数は

$${}_4C_2 \times {}_3C_1 + {}_4C_1 \times {}_3C_2 = 18 + 12 = 30 \quad (\text{通り})$$

よって, 求める確率は $\frac{70 + 45 + 30}{{}_{12}C_3} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$ 圈

類題 白玉 3 個, 赤玉 4 個, 黒玉 5 個が入っている袋から同時に 3 個の玉を取り出す。

- (1) 3 個の玉の色がすべて同じである確率を求めよ。(20 点)
- (2) 3 個の玉の色が 2 種類である確率を求めよ。(30 点)

[成城大]

22 確 率 (2)

数学A

/ 50

★★

22 《例題》 2 桁の自然数 10, 11, 12, …… , 99 の数を 1 枚に 1 つずつ書いたカードが箱の中に入っている。この箱から 1 枚のカードを取り出すとき、その自然数が 3 の倍数であるという事象を A 、5 の倍数であるという事象を B とする。このとき、次の確率を求めよ。 [関東学院大]

- (1) $P(A)$ (2) $P(B)$ (3) $P(A \cap B)$ (4) $P(A \cup B)$

【解答】 (1) 2 桁の自然数のカードは全部で 90 枚ある。

$A = \{3 \cdot 4, 3 \cdot 5, \dots, 3 \cdot 33\}$ で、3 の倍数のカードは 30 枚あるから

$$P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3} \quad \text{答}$$

- (2) $B = \{5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 19\}$ で、5 の倍数のカードは 18 枚あるから

$$P(B) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5} \quad \text{答}$$

- (3) $A \cap B$ は 3 と 5 の最小公倍数 15 の倍数の事象である。

$A \cap B = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2, \dots, 15 \cdot 6\}$ で、15 の倍数のカードは 6 枚あるから

$$P(A \cap B) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} \quad \text{答}$$

- (4) 和事象の確率から $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15} \quad \text{答}$

【類題】 0 から 5 の 6 種類の数字が表記された 2 つのさいころがある。この 2 つのさいころを投げるとき、次の確率を求めよ。ただし、0 は 5 の倍数で偶数とする。 [沖縄国際大]

- (1) 目の和が 5 となる確率 (2) 目の和が 5 の倍数となる確率
(3) 目の和が奇数となる確率 (4) 目の和が奇数または 5 の倍数となる確率

((1) 5 点 (2) 10 点 (3) 15 点 (4) 20 点)

23 反復試行の確率

数学 A

/ 50

★★

23 《例題》 数直線上を原点から出発して、さいころを投げて偶数が出たら右へ1、奇数が出たら左へ1進むことにする。さいころを10回投げるとき、原点にいる確率は $\frac{1}{2^{10}}$ であり、原点から右へ2だけ進んだ点にいる確率は $\frac{1}{2^{10}}$ である。 [神奈川工科大]

【解答】 偶数の目が x 回出るとすると、奇数の目は $10-x$ 回出る。

数直線の右へ1進むことを $+1$ 、左へ1進むことを -1 とすると、さいころを10回投げた後の点の位置は $x-(10-x)=2x-10$ と表される。

$$2x-10=0 \text{ とすると } x=5$$

よって、原点にいるのは偶数が5回、奇数が5回出る場合である。

$$\text{したがって、原点にいる確率は } {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256} \quad \text{答}$$

$$\text{また、} 2x-10=2 \text{ とすると } x=6$$

よって、原点から右へ2だけ進んだ点にいるのは偶数が6回、奇数が4回出る場合である。

したがって、原点から右へ2だけ進んだ点にいる確率は

$${}_{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = {}_{10}C_4 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{105}{512} \quad \text{答}$$

【類題】 x 軸上を動く点 P がある。さいころを投げて、4 以下の目が出れば点 P は x 軸上の正の方向に3だけ進み、5 以上の目が出れば x 軸上の負の方向に1だけ進むことにする。さいころを4回投げたとき、原点から出発した点 P が原点にある確率は $\frac{1}{2^4}$ ， $x=1$ の点にある確率は $\frac{1}{2^4}$ ， $x=-4$ の点にある確率は $\frac{1}{2^4}$ である。 [西南学院大]

24 三角形の内心

数学A

/ 50

★★

24 《例題》 $AB=5$, $BC=9$, $CA=7$ である $\triangle ABC$ の内心を I とする。 AI と辺 BC の交点を D とするとき、次のものを求めよ。

(1) 線分 BD の長さ(2) $AI : ID$

【解答】 I は $\triangle ABC$ の内心であるから、3つの内角の二等分線の交点である。

(1) $\triangle ABC$ において、 AD は $\angle A$ の二等分線であるから

$$AB : AC = BD : DC$$

$$\text{すなわち } 5 : 7 = BD : (9 - BD)$$

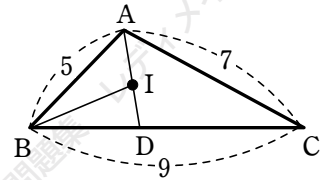
$$\text{よって } 5(9 - BD) = 7BD$$

$$\text{これを解いて } BD = \frac{15}{4} \quad \text{答}$$

(2) $\triangle ABD$ において、 BI は $\angle B$ の二等分線であるから

$$AB : BD = AI : ID$$

$$\text{よって } AI : ID = 5 : \frac{15}{4} = 4 : 3 \quad \text{答}$$



【類題】 $AB=6$, $BC=10$, $CA=9$ である $\triangle ABC$ の内心を I とする。 AI と辺 BC の交点を D とするとき、次のものを求めよ。(1) 30点 (2) 20点

(1) 線分 BD の長さ(2) $AI : ID$

25 円周角の定理

数学 A

/ 50

★★

25 《例題》 右の図において、角 θ を求めよ。**解答** 右の図のように、4 点 A, B, P, Q をとる。

$\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$ であるから、円周角の定理の逆により、4 点 A, B, P, Q は 1 つの円周上にある。

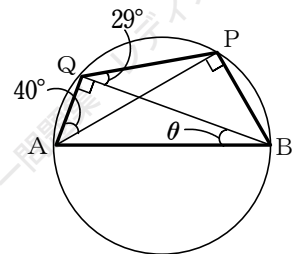
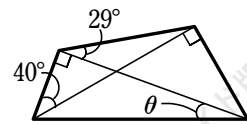
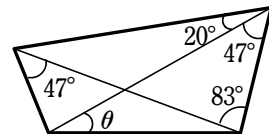
よって、同じ弧に対する円周角は等しいから

$$\theta = \angle ABQ = \angle APQ$$

$\triangle APQ$ の内角の和は 180° であるから

$$40^\circ + \theta + (90^\circ + 29^\circ) = 180^\circ$$

したがって $\theta = 21^\circ$ 〇

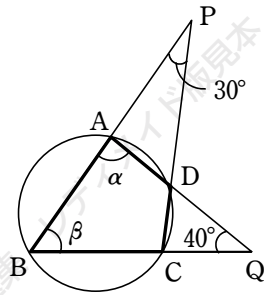
**類題** 右の図において、角 θ を求めよ。

26 円に内接する四角形

数学 A

50

- ★★
26 《例題》 右の図で、四角形 ABCD は円に内接している。角 α , β を求めよ。



解答 $\triangle ABQ$ の内角の和は 180° であるから

$$\alpha + \beta + 40^\circ = 180^\circ \quad \dots\dots ①$$

また、四角形 ABCD は円に内接しているから

$$\angle DCB = 180^\circ - \alpha \quad \leftarrow \text{対角の和が } 180^\circ$$

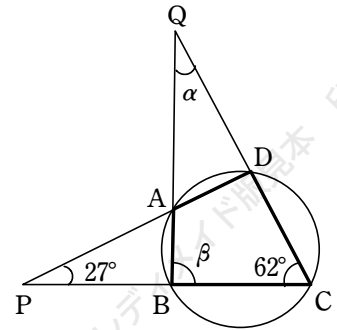
$\triangle PBC$ の内角の和は 180° であるから

$$30^\circ + \beta + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

$$\text{すなわち} \quad -\alpha + \beta = -30^\circ \quad \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{ を連立して解くと} \quad \alpha = 85^\circ, \beta = 55^\circ \quad \text{答}$$

- 類題** 右の図で、四角形 ABCD は円に内接している。角 α , β を求めよ。



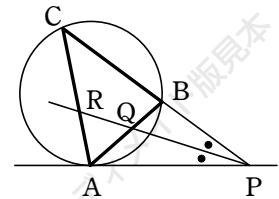
27 接線と弦の作る角

数学 A

/ 50

★★

27 《例題》 右の図のように， $\triangle ABC$ とその外接円があり， A を通る円の接線と辺 CB を延長した直線の交点を P とする。さらに， $\angle APB$ の二等分線が辺 AB ， AC と交わる点をそれぞれ Q ， R とするとき， $AQ = AR$ であることを証明せよ。



【解答】 接線と弦の作る角により $\angle BAP = \angle BCA$

$\angle APB$ の二等分線より $\angle CPR = \angle APQ$

$\triangle APQ$ において $\angle AQR = \angle QAP + \angle APQ$ ← 内角と外角の関係

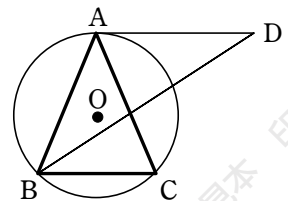
$\triangle CPR$ において $\angle ARQ = \angle BCR + \angle CPR$ ← 内角と外角の関係

以上により $\angle AQR = \angle ARQ$

よって， $\triangle AQR$ は二等辺三角形となる。

したがって $AQ = AR$ 終

【類題】 $AB = AC$ の二等辺三角形 ABC とその外接円 O がある。右の図のように， $\angle B$ の二等分線と点 A における円 O の接線との交点を D とするとき， $AB = AD$ であることを証明せよ。



28 方べきの定理

数学A

/ 50

★★

28 《例題》 (1) 点 O を中心とする半径 2 の円の内部に点 P がある。 P を通る円 O の弦 AB について、 $PA \cdot PB = 1$ であるとき、線分 OP の長さを求めよ。

(2) 1 つの円において、2 つの弦 AB , CD が点 P で交わるとき、 $PA = PC$ ならば $AB = CD$ であることを証明せよ。

【解答】 (1) P を通る直径を CD とすると、方べきの定理により

$$PC \cdot PD = PA \cdot PB = 1$$

$$\text{よって} \quad (OC - OP)(OD + OP) = 1$$

$$\text{すなわち} \quad (2 - OP)(2 + OP) = 1$$

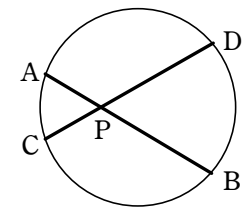
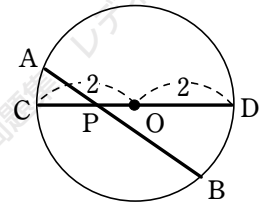
$$\text{ゆえに} \quad 2^2 - OP^2 = 1 \quad \text{よって} \quad OP^2 = 3$$

$$OP > 0 \text{ であるから} \quad OP = \sqrt{3} \quad \text{【答】}$$

(2) 方べきの定理により $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$$PA = PC \text{ であるから} \quad PB = PD$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad AB &= AP + PB \\ &= PC + PD = CD \quad \text{【終】} \end{aligned}$$



【類題】 (1) 点 O を中心とする半径 3 の円の内部に点 P がある。 P を通る円 O の弦 AB について、 $PA \cdot PB = 2$ であるとき、線分 OP の長さを求めよ。(30 点)

(2) 2 点 A , B で交わる 2 円において、線分 AB の延長上にある点 C から、2 円それぞれに引いた接線の接点を P , Q とする。このとき、 $CP = CQ$ であることを証明せよ。(20 点)

29 連続する整数の積の性質

数学 A

/ 50

★★

29 《例題》 n は整数とする。 $2n^3 - 3n^2 + n$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad 2n^3 - 3n^2 + n &= n(n-1)(2n-1) = n(n-1)\{(n-2) + (n+1)\} \\ &= (n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

$(n-2)(n-1)n$, $(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから、どちらも 6 の倍数である。

よって、 $2n^3 - 3n^2 + n$ は 6 の倍数である。 終

類題 (1) m , n を自然数とする。 $m^3 + 2n^3 + 3n^2 - m + n$ が 6 で割り切れることを証明せよ。

(25 点) [同志社大]

(2) n が 3 以上の奇数のとき、 $n^3 - n$ は 24 で割り切れることを示せ。(25 点) [宮崎大]

30 文字式と最大公約数

数学A

/ 50

★★

30 《例題》 (1) n が自然数のとき, $3n+1$ と $3n+2$ は互いに素であることを示せ。(2) $9n+3$ と $2n+3$ の最大公約数が 7 になるような 2 桁の自然数 n をすべて求めよ。解答 (1) $3n+2=(3n+1)\cdot 1+1$, $3n+1=1\cdot(3n+1)+0$ よって, $3n+1$ と $3n+2$ の最大公約数は 1 である。したがって, $3n+1$ と $3n+2$ は互いに素である。 終(2) $9n+3=(2n+3)\cdot 4+n-9$, $2n+3=(n-9)\cdot 2+21$ よって, $9n+3$ と $2n+3$ の最大公約数は, $n-9$ と 21 の最大公約数に等しい。ゆえに, $n-9$ と 21 の最大公約数は 7 であり, $21=3\cdot 7$ であるから, $n-9$ は 7 の倍数であるが, 3 の倍数ではない。また, $1\leq n-9\leq 90$ であるから $n-9=7, 14, 28, 35, 49, 56, 70, 77$ よって $n=16, 23, 37, 44, 58, 65, 79, 86$ 答類題 (1) n が自然数のとき, $7n+10$ と $2n+3$ は互いに素であることを示せ。(25 点)(2) $7n+6$ と $3n+4$ の最大公約数が 5 になるような 2 桁の自然数 n をすべて求めよ。(25 点)

3 1 分数方程式の自然数解

数学 A

50

★★

31 《例題》 等式 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

解答 等式の両辺に $2xy$ を掛けて $4y + 2x = xy$

変形すると $(x-4)(y-2) = 8$ …… ①

x, y は自然数であるから, $x-4, y-2$ は整数で $x-4 \geq -3, y-2 \geq -1$

よって, ① から $(x-4, y-2) = (1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$

したがって $(x, y) = (5, 10), (6, 6), (8, 4), (12, 3)$ 答

類題 (1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3}$ かつ $a < b$ を満たす正の整数 a, b を求めよ。(25 点)

[千葉工大]

(2) x, y を自然数とすると, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ となる x, y の値の組 (x, y) をすべて求めよ。(25 点)

[同志社大]

3 2 n 進法の数と自然数の決定

数学 A

/ 50

★★

32 《例題》 自然数 N を 5 進法と 7 進法で表すと、ともに 2 桁の数であり、各位の数の並びが逆になるという。 N を 10 進法で表せ。

【解答】 N が 5 進法で $ab_{(5)}$ と表されるとすると、7 進法では $ba_{(7)}$ となる。

底について $5 < 7$ であるから $1 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 4$ …… ①

N を 10 進法で表すと

$$N = ab_{(5)} = a \cdot 5^1 + b \cdot 5^0 = 5a + b$$

$$N = ba_{(7)} = b \cdot 7^1 + a \cdot 7^0 = a + 7b$$

$$\text{よって } 5a + b = a + 7b \quad \text{ゆえに } 2a = 3b$$

$$\text{これと ① を満たす整数 } a, b \text{ は } a = 3, b = 2$$

$$\text{したがって } N = 5 \cdot 3 + 2 = 17 \quad \text{答}$$

【類題】 自然数 N を 5 進法と 7 進法で表すと、ともに 3 桁の数であり、各位の数の並びが逆になるという。 N を 10 進法で表せ。

3 3 二項定理

数学Ⅱ / 50

★★

33 《例題》 (1) $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ。

[昭和女子大]

(2) $(1+x+x^2)^{10}$ の展開式における x^4 の係数を求めよ。

[共立薬大]

【解答】 (1) $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^6$ の展開式における一般項は ${}_6C_r (x^2)^{6-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = {}_6C_r (-2)^r \cdot \frac{x^{12-2r}}{x^r}$

$12-2r=r$ とすると $r=4$

よって、求める定数項は ${}_6C_4 (-2)^4 = {}_6C_2 \cdot 16 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 16 = 240$ 答

(2) $(1+x+x^2)^{10}$ の展開式における一般項は

$$\frac{10!}{p! q! r!} \cdot 1^p x^q (x^2)^r = \frac{10!}{p! q! r!} x^{q+2r} \quad \text{ただし } p+q+r=10$$

$q+2r=4$ とすると、 p, q, r は 0 以上 10 以下の整数であるから

$$(p, q, r) = (8, 0, 2), (7, 2, 1), (6, 4, 0)$$

よって、 x^4 の係数は $\frac{10!}{8! 0! 2!} + \frac{10!}{7! 2! 1!} + \frac{10!}{6! 4! 0!} = 45 + 360 + 210 = 615$ 答

【類題】 (1) $\left(x - \frac{5}{x^2}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ。(20 点)

[琉球大]

(2) $(x^2 - 2x + 2)^4$ の展開式における x^5 の係数を求めよ。(30 点)

[埼玉工大]

3 4 多項式の割り算, 恒等式

数学 II

/ 50

★★

34 《例題》多項式 $x^3 + ax^2 + 2x + b$ が $x^2 - x + 1$ で割り切れるとき, 定数 a, b の値を求めよ。[撰南大]【解答】 右の割り算から, $x^3 + ax^2 + 2x + b$ を $x^2 - x + 1$ で割ったときの余りは

$$(a+2)x - a + b - 1$$

余りは 0 であるから, 恒等式

$$(a+2)x - a + b - 1 = 0 \text{ が成り立つ。}$$

$$\text{よって } a+2=0, -a+b-1=0$$

$$\text{これを解いて } a=-2, b=-1 \text{ 答}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x + 1 \overline{) x^3 + ax^2 + 2x + b} \\
 \underline{x^3 - x^2 + x} \\
 (a+1)x^2 + x + b \\
 \underline{(a+1)x^2 - (a+1)x + a+1} \\
 (a+2)x - a + b - 1
 \end{array}$$

【別解】 $x^3 + ax^2 + 2x + b$ が $x^2 - x + 1$ で割り切れるとき, 商は $x + c$ とおけて, 等式

$$x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 - x + 1)(x + c)$$

が成り立つ。

$$\text{右辺を展開して整理すると } x^3 + ax^2 + 2x + b = x^3 + (c-1)x^2 + (-c+1)x + c$$

これは x についての恒等式であるから, 両辺の係数を比較して

$$a = c - 1 \quad \cdots \cdots \text{①}, \quad 2 = -c + 1 \quad \cdots \cdots \text{②}, \quad b = c \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{② から } c = -1 \quad \text{これを ①, ③ に代入して } a = -2, b = -1 \text{ 答}$$

【類題】 多項式 $x^3 - x^2 + ax + b$ が多項式 $x^2 + x + 1$ で割り切れるとき, 定数 a, b の値を求めよ。

[京都産大]

3 5 等式の証明

数学Ⅱ

/ 50

★★

35 《例題》 a, b, c を実数とするととき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $(a^2 - 1)(b^2 - 1) = (ab + 1)^2 - (a + b)^2$

(2) $a + b + c = 0$ のとき $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = 0$

解答 (1) (左辺) $= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$

(右辺) $= (a^2b^2 + 2ab + 1) - (a^2 + 2ab + b^2) = a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$

よって $(a^2 - 1)(b^2 - 1) = (ab + 1)^2 - (a + b)^2$ 終

(2) $a + b + c = 0$ より $c = -a - b$

よって (左辺) $= (a + b)\{b + (-a - b)\}\{(-a - b) + a\} + ab(-a - b)$

$= (a + b)(-a)(-b) + ab(-a - b) = a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 = 0$

したがって $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = 0$ 終

別解 $a + b + c = 0$ より $a + b = -c, b + c = -a, c + a = -b$

よって $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (-c)(-a)(-b) + abc$

$= -abc + abc = 0$ 終

類題 a, b, c, d を実数とするととき、次の等式が成り立つことを証明せよ。(1) 20点 (2) 30点

(1) $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2$

(2) $a + b + c = 0$ のとき $ab(a + b)^2 + bc(b + c)^2 + ca(c + a)^2 = 0$

36 比例式の値

数学Ⅱ

/ 50

★★

36 《例題》 $\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} \neq 0$ のとき $x : y : z = \text{ア}$ $\square$, $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \text{イ}$ $\square$ である。

[愛知学院大]

解答 $\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} = k$ とおくと, $k \neq 0$ で ← 比例式は $=k$ とおく。

$$x+y=5k \quad \cdots \cdots \text{①}, \quad y+z=6k \quad \cdots \cdots \text{②}, \quad z+x=7k \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{①}+\text{②}+\text{③} \text{ から } 2(x+y+z)=18k$$

$$\text{よって } x+y+z=9k \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{④}-\text{①} \text{ から } z=4k \quad \text{④}-\text{②} \text{ から } x=3k \quad \text{④}-\text{③} \text{ から } y=2k$$

$$\text{したがって } x : y : z = 3k : 2k : 4k = \text{ア} 3 : 2 : 4 \quad \text{答}$$

$$\text{また } \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3k \cdot 2k + 2k \cdot 4k + 4k \cdot 3k}{(3k)^2 + (2k)^2 + (4k)^2} = \frac{26k^2}{29k^2} = \text{イ} \frac{26}{29} \quad \text{答}$$

類題 $\frac{x+y}{8} = \frac{y+z}{7} = \frac{z+x}{9} \neq 0$ のとき, x, y を z を用いて表せ。

このとき, $\frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{(x+y+z)^2}$ の値を求めよ。

[類 広島工大]

37 不等式の証明

数学Ⅱ

/ 50

★★

37 《例題》(1) $x > 0, y > 0$ のとき, 不等式 $(3x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y}\right) \geq 12$ を証明せよ。

[九州産大]

(2) 不等式 $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ を証明せよ。

[岐阜聖徳学園大]

解答 (1) $(3x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y}\right) = 3 + \frac{9x}{y} + \frac{y}{x} + 3 = \frac{9x}{y} + \frac{y}{x} + 6$

$\frac{9x}{y} > 0, \frac{y}{x} > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{9x}{y} + \frac{y}{x} + 6 \geq 2\sqrt{\frac{9x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + 6 = 6 + 6 = 12$$

よって $(3x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y}\right) \geq 12$ 終

参考 等号が成り立つのは, $x > 0, y > 0$ かつ $\frac{9x}{y} = \frac{y}{x}$ すなわち $3x = y$ のときである。

$$(2) (a + b + c)^2 = \{a + (b + c)\}^2 = a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 \\ = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\begin{aligned} \text{よって } & 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 \\ &= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

したがって $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ 終

参考 等号が成り立つのは, $a = b = c$ のときである。

類題 (1) $x > 0, y > 0$ のとき, 不等式 $(x + 2y)\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) \geq 9$ を証明せよ。(20点)

(2) 不等式 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ を証明せよ。(30点)

3 8 2 数を解とする 2 次方程式

数学 II

/ 50

★★

38 《例題》2 次方程式 $x^2 + 3x - 2 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき、 α^3, β^3 を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。 [中部大]

【解答】 解と係数の関係から $\alpha + \beta = -\frac{3}{1} = -3, \quad \alpha\beta = \frac{-2}{1} = -2$

したがって $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$$= (-3)^3 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) = -45 \quad \leftarrow 2 \text{ 数の和}$$

$$\alpha^3 \cdot \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = (-2)^3 = -8 \quad \leftarrow 2 \text{ 数の積}$$

よって、求める 2 次方程式の 1 つは $x^2 + 45x - 8 = 0$ ㊟

【類題】 2 次方程式 $2x^2 + 3x + 2 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき、次の 2 数を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作れ。(1)(2) 各 25 点

(1) α^2, β^2

(2) $\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{\beta^3}$

39 2 次方程式の解と数の大小

数学 II

/ 50

★★

39 《例題》2 次方程式 $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち、かつ、その解が 2 つとも 1 より大きいとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

【解答】2 次方程式の 2 つの解を α, β , 判別式を D とする。

方程式が条件を満たすのは、次の ① ~ ③ が同時に成り立つときである。

$$D > 0 \quad \cdots \cdots \text{①}, \quad (\alpha - 1) + (\beta - 1) > 0 \quad \cdots \cdots \text{②}, \quad (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{ここで} \quad \frac{D}{4} = (-m)^2 - (m + 6) = m^2 - m - 6 = (m + 2)(m - 3)$$

$$\text{① より, } (m + 2)(m - 3) > 0 \text{ であるから} \quad m < -2, \quad 3 < m \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{②, ③ より} \quad (\alpha + \beta) - 2 > 0, \quad \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 > 0$$

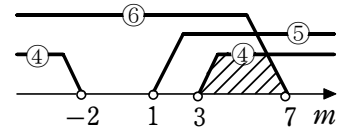
$$\text{解と係数の関係から} \quad \alpha + \beta = 2m, \quad \alpha\beta = m + 6$$

$$\text{よって} \quad 2m - 2 > 0, \quad (m + 6) - 2m + 1 > 0$$

$$\text{したがって} \quad m > 1 \quad \cdots \cdots \text{⑤}$$

$$m < 7 \quad \cdots \cdots \text{⑥}$$

$$\text{④, ⑤, ⑥ の共通範囲を求めて} \quad 3 < m < 7 \quad \text{答}$$



【類題】2 次方程式 $x^2 + 2(m - 1)x + 7 - 3m = 0$ の解がすべて 2 より大きい実数であるとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

40 余りの決定

数学Ⅱ / 50

★★

40 《例題》多項式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 7 であり, $x+1$ で割ると余りが 1 である。 $P(x)$ を $(x-2)(x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。 [類 京都産大]

【解答】 $P(x)$ を 2 次式 $(x-2)(x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x-2)(x+1)Q(x) + ax + b$$

この等式から $P(2) = 2a + b$, $P(-1) = -a + b$

$P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 7 であるから $P(2) = 7$

$P(x)$ を $x+1$ で割ると余りが 1 であるから $P(-1) = 1$

よって $2a + b = 7$, $-a + b = 1$

これを解くと $a = 2$, $b = 3$

したがって, 求める余りは $2x + 3$ 答

多項式 $P(x)$ を 2 次式で割ったときの余りは, 1 次式か定数。

【類題】多項式 $P(x)$ を $x-3$ で割ると余りが 7 であり, $x+2$ で割ると余りが -3 である。 $P(x)$ を $x^2 - x - 6$ で割ったときの余りを求めよ。 [関東学院大]

4 1 高次方程式

数学Ⅱ

/ 50

★★

41 《例題》 方程式 $x^3 - x^2 + ax + b = 0$ の解の 1 つが $x = 1 + i$ であるとき、実数の定数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。 [東京電機大]

【解答】 $1 + i$ がこの方程式の解であるから $(1 + i)^3 - (1 + i)^2 + a(1 + i) + b = 0$

$$\begin{aligned} \text{ここで (左辺)} &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3 - (1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2) + a + ai + b \\ &= 1 + 3i - 3 - i - (1 + 2i - 1) + a + ai + b = (a + b - 2) + ai \end{aligned}$$

$$\text{よって } (a + b - 2) + ai = 0$$

$$a + b - 2, a \text{ は実数であるから } a + b - 2 = 0, a = 0$$

$$\text{これを解くと } a = 0, b = 2$$

$$\text{このとき、方程式は } x^3 - x^2 + 2 = 0$$

$$P(x) = x^3 - x^2 + 2 \text{ とすると}$$

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 2 = 0$$

よって、 $P(x)$ は $x + 1$ を因数にもつから、方程式は

$$(x + 1)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\text{これを解くと } x = -1, 1 \pm i$$

$$\text{以上から } a = 0, b = 2 ; \text{他の解は } -1, 1 - i \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 2 \\ x + 1 \overline{) x^3 - x^2 + 2} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -2x^2 \\ \underline{-2x^2 - 2x} \\ 2x + 2 \\ \underline{2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

【類題】 方程式 $x^3 + ax + b = 0$ の解の 1 つが $x = 1 + \sqrt{2}i$ であるとき、実数の定数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。 [摂南大]

4 2 直線に関して対称な点

数学Ⅱ

/ 50

★★

42 《例題》直線 $3x - y + 2 = 0$ に関して、点 A (1, 2) と対称な点 B の座標を求めよ。解答 直線 $3x - y + 2 = 0$ を ℓ とし、点 B の座標を (p, q) とする。直線 ℓ の傾きは 3 であり、直線 AB は ℓ に垂直であるから

$$3 \cdot \frac{q-2}{p-1} = -1$$

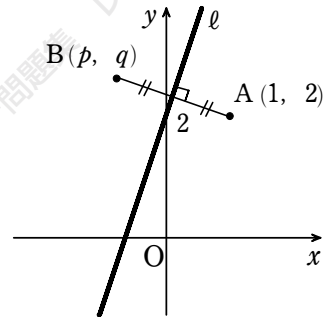
$$\text{よって } p + 3q = 7 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

また、線分 AB の中点 $\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+2}{2}\right)$ は ℓ 上にあるから

$$3 \cdot \frac{p+1}{2} - \frac{q+2}{2} + 2 = 0$$

$$\text{ゆえに } 3p - q = -5 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ② を連立させて解くと } p = -\frac{4}{5}, q = \frac{13}{5}$$

したがって、点 B の座標は $\left(-\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$ 答類題 直線 $\ell : 2x - y + 3 = 0$ に関して、点 C(3, 12) と対称な点を P(a, b) とする。a, b の値と、

直線 OP の傾きを求めよ。(O は原点)

(類 自治医大)

4 3 円の接線

数学Ⅱ

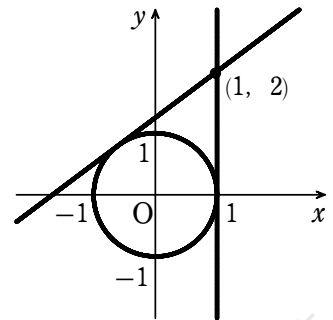
/ 50

★★

43 《例題》(1) 円 $x^2 + y^2 = 16$ 上の点 $(3, \sqrt{7})$ における接線の方程式を求めよ。 [類 昭和薬大](2) 点 $(1, 2)$ から円 $x^2 + y^2 = 1$ に引いた接線の方程式を求めよ。 [類 酪農学園大]【解答】(1) 求める接線の方程式は $3x + \sqrt{7}y = 16$ 図(2) 接点を $P(a, b)$ とすると、 P は円上にあるから $a^2 + b^2 = 1$ …… ①また、点 P における接線の方程式は $ax + by = 1$ この直線が点 $(1, 2)$ を通るから $a + 2b = 1$ よって $a = -2b + 1$ …… ②② を ① に代入すると $(-2b + 1)^2 + b^2 = 1$ 整理すると $5b^2 - 4b = 0$ よって、 $b(5b - 4) = 0$ より $b = 0, \frac{4}{5}$ ② から $b = 0$ のとき $a = 1$, $b = \frac{4}{5}$ のとき $a = -\frac{3}{5}$

したがって、求める接線の方程式は

$$1 \cdot x + 0 \cdot y = 1, -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 1$$

すなわち $x = 1, 3x - 4y = -5$ 図【類題】(1) 円 $x^2 + y^2 = 25$ 上の点 $(-4, -3)$ における接線の方程式を求めよ。(10点)(2) 点 $(-1, 3)$ から円 $x^2 + y^2 = 5$ に引いた接線の方程式を求めよ。(40点)

[(1) 類 神奈川工科大 (2) 類 明星大]

4 4 軌 跡

数学Ⅱ

/ 50

★★

44 《例題》点 $A(-3, 0)$ とする。点 Q が円 $x^2 + y^2 = 1$ の周上を動くとき、線分 AQ を $1:2$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。 [類 北海道情報大]

【解答】 点 P の座標を (x, y) 、点 Q の座標を (s, t) とする。

点 Q は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあるから $s^2 + t^2 = 1$ …… ①

点 P は線分 AQ を $1:2$ に内分するから

$$x = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot s}{1 + 2} = \frac{s - 6}{3}, \quad y = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot t}{1 + 2} = \frac{t}{3}$$

ゆえに $s = 3x + 6, \quad t = 3y$

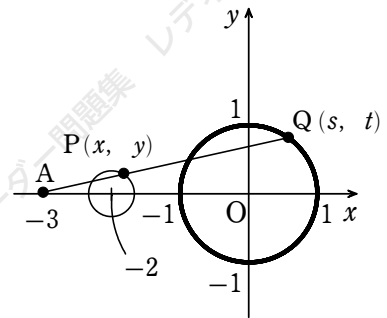
これを ① に代入すると $(3x + 6)^2 + (3y)^2 = 1$

$$\text{すなわち} \quad (x + 2)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \dots\dots ②$$

よって、点 P は円 ② 上にある。

逆に、円 ② 上のすべての点 $P(x, y)$ は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は、点 $(-2, 0)$ を中心とする半径 $\frac{1}{3}$ の円である。 ㊦



【類題】 点 $A(-2, 0)$ とする。点 Q が円 $(x-2)^2 + y^2 = 5$ の周上を動くとき、線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ。 [類 大阪学院大]

4 5 領域と最大・最小

数学Ⅱ

/ 50

★★

45 《例題》 x, y が 4 つの不等式

$$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 10, 4x + y \leq 20$$

を同時に満たすとき、 $x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

[類 広島修道大]

【解答】 与えられた連立不等式の表す領域を D とする。

$$x + 2y \leq 10 \text{ を変形すると } y \leq -\frac{1}{2}x + 5$$

$$4x + y \leq 20 \text{ を変形すると } y \leq -4x + 20$$

領域 D は 4 点 $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(\frac{30}{7}, \frac{20}{7})$, $(5, 10)$ を

頂点とする四角形の周および内部である。

$$x + y = k \text{ とおくと } y = -x + k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

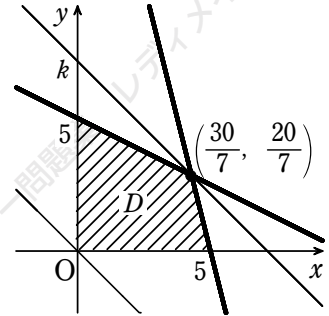
直線 $\textcircled{1}$ が領域 D の点を通るとき k の値の最大値、

最小値を求めればよい。図からわかるように、 k の値は直線 $\textcircled{1}$ が点 $(\frac{30}{7}, \frac{20}{7})$ を通るとき

最大となり、点 $(0, 0)$ を通るとき最小となる。

よって、 $x + y$ は $x = \frac{30}{7}$, $y = \frac{20}{7}$ のとき最大値 $\frac{50}{7}$ をとり、

$x = 0$, $y = 0$ のとき最小値 0 をとる。 答



【類題】 座標平面において、連立不等式 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $5x + 2y \leq 9$, $x + 3y \leq 7$ の表す領域を D と

する。領域 D に含まれる点 (x, y) で $k = 3x + 4y$ を最大とする点の座標は $(x, y) = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right)$ であり、

そのときの k の値は $\frac{14}{5}$ である。

[芝浦工大]

4 6 三角関数の最大・最小

数学Ⅱ

/ 50

★★

46 《例題》 $y = 3\cos 2\theta + 6\sin \theta + 9$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値と最小値を求めよ。

〔類 成蹊大〕

解答 $y = 3\cos 2\theta + 6\sin \theta + 9 = 3(1 - 2\sin^2 \theta) + 6\sin \theta + 9$

$$= -6\sin^2 \theta + 6\sin \theta + 12$$

$$x = \sin \theta \text{ とおく。 } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから } -1 \leq x \leq 1$$

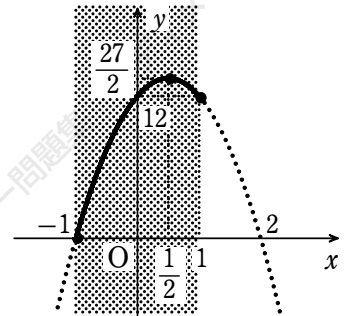
$$y = -6x^2 + 6x + 12 = -6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{2}$$

右の図から、 y は $x = \frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{27}{2}$,

$x = -1$ で最小値 0 をとる。

したがって $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ のとき 最大値 $\frac{27}{2}$,

$\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき 最小値 0 〇



類題 $0 \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$ とする。関数 $y = \cos 2\theta - 2\cos \theta$ は $\theta = \pi$ のとき最小値 π をとる。

また、 y の最大値は π である。

〔青山学院大〕

4 7 2 直線のなす角

数学 II

/ 50

★★

47 《例題》2 直線 $5x - y - 2 = 0$ と $3x - 4y + 10 = 0$ のなす角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。このとき、

$\tan \theta$ の値を求めよ。

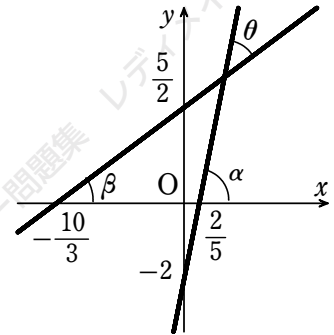
【解答】2 直線の方程式を変形すると

$$y = 5x - 2, \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

図のように、2 直線と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α , β とすると、2 直線のなす角 θ は $\alpha - \beta$ である。

$\tan \alpha = 5$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{5 - \frac{3}{4}}{1 + 5 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{17}{19} \quad \text{答} \end{aligned}$$



【類題】2 直線 $2x + y - 3 = 0$, $3x - y + 2 = 0$ と x 軸の正の方向とのなす角をそれぞれ α , β とする。

(1) $\tan \alpha$ と $\tan \beta$ の値をそれぞれ求めよ。(20 点)

(2) 2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。(30 点)

[広島工大]

4 8 三角関数の不等式 (合成利用)

数学Ⅱ

/ 50

★★

48 《例題》 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 不等式 $\sin \theta > \sqrt{3} \cos \theta$ を解け。解答 $\sin \theta > \sqrt{3} \cos \theta$ から $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta > 0$ $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)$ であるから, 不等式は

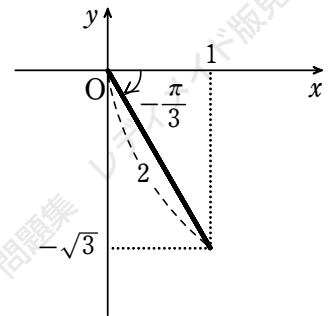
$$2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) > 0$$

すなわち $\sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) > 0 \dots\dots ①$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき } -\frac{\pi}{3} \leq \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{よって, ① から } 0 < \theta - \frac{\pi}{3} < \pi$$

$$\text{したがって } \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{4}{3}\pi \quad \text{答}$$

類題 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 不等式 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \geq 1$ を解け。

(類 摂南大)

4 9 指数・対数の計算

数学Ⅱ

/ 50

★★

49 《例題》(1) $2^x + 2^{-x} = 5$ であるとき, $8^x + 8^{-x}$ の値を求めよ。

[大阪工大]

(2) $6\log_3\sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_3 2 + \log_3 \frac{\sqrt{2}}{3}$ を計算せよ。

[武蔵大]

(3) $(\log_3 4)(\log_4 2)(\log_2 3)$ の値を求めよ。

[信州大]

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 8^x + 8^{-x} &= (2^x)^3 + (2^{-x})^3 = (2^x + 2^{-x})^3 - 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} (2^x + 2^{-x}) \quad \leftarrow a^3 + b^3 \\
 &= (2^x + 2^{-x})^3 - 3(2^x + 2^{-x}) \quad \quad \quad = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\
 &= 5^3 - 3 \cdot 5 = 110 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 6\log_3\sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_3 2 + \log_3 \frac{\sqrt{2}}{3} &= \log_3 (\sqrt{3})^6 - \log_3 \sqrt{2} + \log_3 \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \leftarrow k\log_a M \\
 &= \log_3 \frac{3^3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 3} = \log_3 3^2 = 2 \quad \text{答} \quad \quad \quad = \log_a M^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad (\log_3 4)(\log_4 2)(\log_2 3) &= \log_3 4 \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 2} \quad \leftarrow \text{底の変換公式を利用。} \\
 &= \log_3 3 = 1 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

類題

(1) $3^x - 3^{-x} = 6$ であるとき, $27^x - 27^{-x}$ の値を求めよ。(20点)

[東京電機大]

(2) $10\log_5\sqrt{5} - \frac{1}{3}\log_5 2 + \log_5 \frac{\sqrt[3]{2}}{25}$ を計算せよ。(15点)

[京都産大]

(3) $(\log_2 3)(\log_5 8)(\log_9 25)$ の値を求めよ。(15点)

[大阪工大]

50 指数・対数の方程式・不等式

数学Ⅱ

50

★★

50 《例題》 次の方程式，不等式を解け。

- (1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+8} \leq 27^x$ [福岡大] (2) $4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$ [近畿大]
 (3) $\log_2(x+1) + \log_2(x-2) < 2$ [同志社大] (4) $9(\log_8 x)^2 - 8\log_4 x + 4 = 0$ [芝浦工大]

解答 (1) 不等式を変形すると $(3^{-1})^{x+8} \leq (3^3)^x$ よって $3^{-x-8} \leq 3^{3x}$
 底 3 は 1 より大きいから $-x-8 \leq 3x$ これを解いて $x \geq -2$ 答
 (2) 方程式を変形すると $(2^2)^x - 2^x \cdot 2^2 - 32 = 0$
 すなわち $(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$ ゆえに $(2^x + 4)(2^x - 8) = 0$
 $2^x > 0$ であるから $2^x = 8$ よって、 $2^x = 2^3$ より $x = 3$ 答
 (3) 真数は正であるから $x+1 > 0$, $x-2 > 0$ よって $x > 2 \dots\dots ①$
 不等式を変形すると $\log_2(x+1)(x-2) < \log_2 2^2$
 底 2 は 1 より大きいから $(x+1)(x-2) < 4$
 整理すると $x^2 - x - 6 < 0$ ゆえに $(x+2)(x-3) < 0$
 よって $-2 < x < 3 \dots\dots ②$ ①, ② から、解は $2 < x < 3$ 答
 (4) 方程式を変形すると $9\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 8}\right)^2 - 8\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right) + 4 = 0$
 よって $9\left(\frac{\log_2 x}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{\log_2 x}{2}\right) + 4 = 0$ すなわち $(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 4 = 0$
 ゆえに $(\log_2 x - 2)^2 = 0$ したがって、 $\log_2 x = 2$ より $x = 2^2 = 4$ 答

類題 次の方程式，不等式を解け。(1)(2) 各 10 点 (3)(4) 各 15 点

- (1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4-x} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^x$ [浜松大] (2) $3^{2x} + 3^{x+1} - 4 = 0$ [武蔵大]
 (3) $\log_2(x-4) + \log_2(x-6) < 3$ [東京経大] (4) $4(\log_4 x)^2 - 3\log_8 x - 2 = 0$ [関西大]

5 1 桁数, 小数首位

数学 II

/ 50

★★

51 《例題》 $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 5 = 0.6990$ として, 次の問いに答えよ。(1) 15^{15} の桁数を求めよ。 [女子栄養大](2) $\left(\frac{2}{9}\right)^{10}$ を小数で表すと, 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。 [東京薬大]【解答】 (1) $\log_{10} 15^{15} = 15 \log_{10} (3 \times 5) = 15(\log_{10} 3 + \log_{10} 5)$ ← 常用対数の値を求める。

$$= 15(0.4771 + 0.6990) = 17.6415$$

$$\text{よって } 17 < \log_{10} 15^{15} < 18 \quad \text{ゆえに } 10^{17} < 15^{15} < 10^{18}$$

したがって, 15^{15} は 18 桁の数である。 答

$$(2) \log_{10} \left(\frac{2}{9}\right)^{10} = \log_{10} \left(\frac{10}{5 \times 3^2}\right)^{10} = 10 \log_{10} \frac{10}{5 \times 3^2} \quad \leftarrow \text{常用対数の値を求める。}$$

$$= 10(\log_{10} 10 - \log_{10} 5 - 2 \log_{10} 3)$$

$$= 10(1 - 0.6990 - 2 \times 0.4771) = -6.532$$

$$\text{よって } -7 < \log_{10} \left(\frac{2}{9}\right)^{10} < -6 \quad \text{ゆえに } 10^{-7} < \left(\frac{2}{9}\right)^{10} < 10^{-6}$$

したがって, $\left(\frac{2}{9}\right)^{10}$ は小数第 7 位に初めて 0 でない数字が現れる。 答【類題】 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として, 次の問いに答えよ。(1) 18^{50} の桁数を求めよ。(20 点) [類 群馬大](2) $\left(\frac{2}{5}\right)^{50}$ を小数で表すと, 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。(30 点) [武庫川女子大]

5 2 曲線外の点を通る接線

数学Ⅱ

50

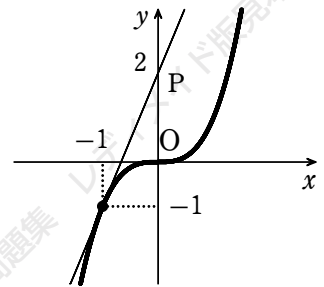
★★

52 《例題》関数 $y = x^3$ のグラフに点 $P(0, 2)$ から引いた接線の方程式は である。

[神奈川大]

【解答】 $f(x) = x^3$ とすると $f'(x) = 3x^2$ 関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 (a, a^3) における接線の方程式は

$$y - a^3 = 3a^2(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 3a^2x - 2a^3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

この直線が点 $P(0, 2)$ を通るから $2 = -2a^3$ a は実数であるから $a = -1$ ゆえに、直線の方程式は $\textcircled{1}$ から $y = 3x + 2$ 答【類題】 点 $(0, 1)$ から、曲線 $y = x^3 - 2x + 3$ に引いた接線の方程式を求めよ。

[酪農学園大]

5 3 極値から関数の決定

数学Ⅱ

/ 50

★★

53 《例題》3 次関数 $f(x)$ は $x = -1$ で極大値 7 をとり、 $x = 3$ で極小値 -25 をとる。 $f(x)$ を求めよ。

[東京電機大]

【解答】 $a \neq 0$ とし、 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とすると $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f'(-1) = 0, f'(3) = 0 \text{ であるから } 3a - 2b + c = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}, 27a + 6b + c = 0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ から } 24a + 8b = 0 \quad \text{よって } b = -3a$$

$$\text{これを①に代入して } 9a + c = 0 \quad \text{ゆえに } c = -9a$$

$$\text{よって } f(x) = ax^3 - 3ax^2 - 9ax + d$$

$$f(-1) = 7, f(3) = -25 \text{ であるから } 5a + d = 7, -27a + d = -25$$

$$\text{ゆえに } a = 1, d = 2 \quad \text{よって } b = -3, c = -9$$

このとき、 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$ であり、 $f(x)$ の増減表は右のようになり、条件を満たす。

$$\text{ゆえに } a = 1, b = -3, c = -9, d = 2$$

$$\text{よって } f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \quad \text{答}$$

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

【類題】 関数 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 1$ が $x = 1$ で極大値 3 をとるとき、定数 a, b の値を求めよ。

また、極小値を求めよ。

[京都産大]

5 4 方程式の実数解の個数

数学Ⅱ

/ 50

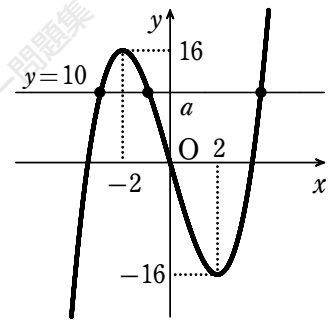
★★

54 《例題》方程式 $x^3 - 12x - a = 0$ の実数解の個数を求めよ。【解答】 方程式を変形すると $x^3 - 12x = a$ ← $= (\text{定数})$ の形に変形。関数 $y = x^3 - 12x$ について $y' = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$ y の増減表は次のようになる。

x	...	-2	...	2	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 16	↘	極小 -16	↗

よって、 $y = x^3 - 12x$ のグラフは、右の図のようになる。

与えられた方程式の実数解の個数は、このグラフと直線

 $y = a$ の共有点の個数に等しい。したがって $a < -16$, $16 < a$ のとき 1 個 $a = \pm 16$ のとき 2 個 $-16 < a < 16$ のとき 3 個 答【類題】 方程式 $x^3 - 6x - a = 0$ の実数解の個数を求めよ。

[倉敷芸科大]

5 5 不等式の証明

数学Ⅱ / 50

★★

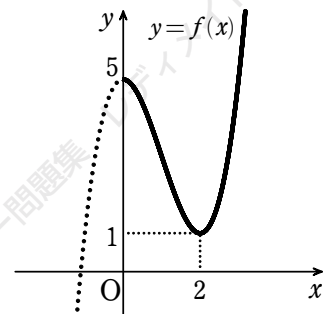
55 《例題》 $x \geq 0$ のとき、不等式 $x^3 + 5 > 3x^2$ を証明せよ。解答 $f(x) = (x^3 + 5) - 3x^2$ とすると← 左辺 - 右辺 を $f(x)$ とする。

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, 2$$

 $x \geq 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	5	↘	極小 1	↗

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ のとき $x = 2$ で最小値 1 をとる。ゆえに、 $x \geq 0$ のとき $f(x) \geq f(2) > 0$ ← $f(x)$ の最小値 > 0 すなわち $x^3 + 5 > 3x^2$ 終

類題 次の不等式を証明せよ。(25 点×2)

(1) $x \geq 0$ のとき $2x^3 - 3x^2 > 12x - 23$

(2) $x > 1$ のとき $x^3 + 3x > 3x^2 + 1$

5 6 定積分の値と関数の決定

数学Ⅱ

/ 50

★★

56 《例題》 次の条件を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(0) = 8, \quad f'(5) = -30, \quad \int_0^1 f(x) dx = 7$$

[広島修道大]

解答 求める 2 次関数を $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする。

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ を微分すると } f'(x) = 2ax + b$$

$$\text{また } \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

$$f(0) = 8 \text{ から } c = 8 \quad \dots\dots ①$$

$$f'(5) = -30 \text{ から } 10a + b = -30 \quad \dots\dots ②$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 7 \text{ から } \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 7 \quad \dots\dots ③$$

$$① \text{ を } ③ \text{ に代入して整理すると } 2a + 3b = -6 \quad \dots\dots ④$$

$$②, ④ \text{ を解くと } a = -3, b = 0$$

$$\text{したがって } f(x) = -3x^2 + 8 \quad \text{答}$$

類題 次の条件を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(2) = 26, \quad f'(2) = 18, \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 6$$

[近畿大]

5 7 定積分で表された関数

数学Ⅱ

/ 50

★★

57 《例題》 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x^2 + \int_0^1 x f(t) dt$$

[城西大]

【解答】 $x^2 + \int_0^1 x f(t) dt = x^2 + x \int_0^1 f(t) dt$ であるから $f(x) = x^2 + x \int_0^1 f(t) dt$

ここで, $\int_0^1 f(t) dt = a$ (a は定数) とおくと $f(x) = x^2 + ax \quad \leftarrow \int_0^1 f(t) dt$ は定数

$$\text{よって} \quad \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (t^2 + at) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{a}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{a}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{2}{3}$$

$$\text{したがって} \quad f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x \quad \text{答}$$

【類題】 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x^2 - \int_{-2}^1 2x f(t) dt$$

[類 大分大]

5 8 面 積

★★

58 《例題》放物線 $y=2x^2+3x+2$ 上の 2 点 $P(-1, 1)$, $Q(1, 7)$ における接線と放物線によって囲まれた部分の面積を求めよ。 [東京電機大]

解答 $y=2x^2+3x+2$ から $y'=4x+3$

点 P における接線の方程式は

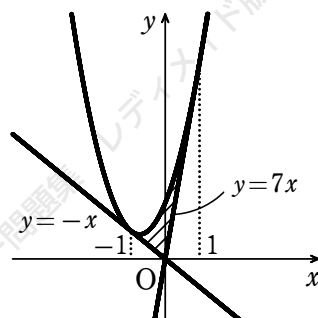
$$y-1=-(x+1) \quad \text{すなわち} \quad y=-x$$

点 Q における接線の方程式は

$$y-7=7(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=7x$$

2 つの接線の交点の x 座標は, $-x=7x$ を解いて $x=0$

右の図から, 求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^0 \{(2x^2+3x+2)-(-x)\}dx+\int_0^1 \{(2x^2+3x+2)-7x\}dx$$

$$=2\int_{-1}^0 (x^2+2x+1)dx+2\int_0^1 (x^2-2x+1)dx$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1=\frac{4}{3} \quad \text{答}$$

参考 $\int (x+a)^2 dx = \frac{(x+a)^3}{3} + C$ が成り立つ。このことを利用すると, 積分の計算は

$$S=2\int_{-1}^0 (x+1)^2 dx+2\int_0^1 (x-1)^2 dx=2\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^0+2\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1=\frac{4}{3} \quad \text{答}$$

類題 放物線 $y=x^2-x-6$ 上の 2 点 $P(-1, -4)$, $Q(3, 0)$ における接線と放物線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

5 9 面積の2等分

★★

59 《例題》放物線 $y = x^2 - 4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を、直線 $y = ax$ が2等分するとき、 a の値を求めよ。
[類 関西学院大]

解答 放物線と直線の交点の x 座標は $x^2 - 4x = ax$ すなわち

$$x\{x - (a + 4)\} = 0 \text{ を解いて } x = 0, a + 4$$

$$\text{図から } 0 < a + 4 < 4 \text{ すなわち } -4 < a < 0$$

放物線と直線で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とすると

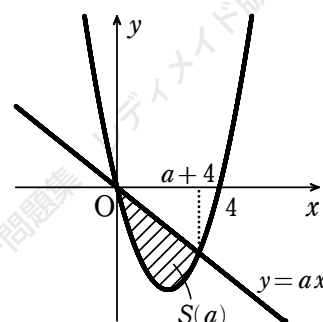
$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{a+4} \{ax - (x^2 - 4x)\} dx = -\int_0^{a+4} x\{x - (a + 4)\} dx \\ &= \frac{1}{6}(a + 4)^3 \quad \leftarrow \int_a^\beta (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

放物線と x 軸 ($y = 0 \cdot x$) で囲まれた部分の面積は $S(0)$ である

$$\text{から、直線 } y = ax \text{ が面積を2等分するとき } S(0) = 2S(a)$$

$$\text{すなわち } \frac{4^3}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6}(a + 4)^3 \quad \text{よって } (a + 4)^3 = 32$$

$$\text{したがって、} a + 4 = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4} \text{ から } a = 2\sqrt[3]{4} - 4 \text{ } (-4 < a < 0 \text{ を満たす) } \text{ 答}$$



類題 放物線 $y = x^2 - 6x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を、直線 $y = ax$ が2等分するとき、 a の値を求めよ。
[類 自治医大]

60 等差数列

数学B

/ 50

★★

60 《例題》第4項が41で、第10項が17である等差数列の初項は ア □□, 公差は イ □□である。

また、この数列の初項から第 n 項までの和 S_n は $n=\text{ウ}$ □□のとき最大値 エ □□をとる。(近畿大)

【解答】この数列の一般項を a_n , 初項を a , 公差を d とすると $a_n = a + (n-1)d$

第4項が41, 第10項が17であるから $41 = a + (4-1)d$, $17 = a + (10-1)d$

すなわち $a + 3d = 41$, $a + 9d = 17$

これを解くと $a = 53$, $d = -4$

したがって、初項は ア 53, 公差は イ -4 答

よって、一般項は $a_n = 53 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 57$

$a_n \geq 0$ とすると $-4n + 57 \geq 0$ よって $n \leq \frac{57}{4} = 14.25$ ← a_n の符号の変わり目を調べる。

ゆえに、 a_1 から a_{14} までは正の数, a_{15} からは負の数となる。

したがって、 S_n は $n=\text{ウ}$ 14 のとき最大となり、その最大値は ← 正の数の項の和が最大。

$$S_{14} = \frac{14}{2} \{2 \cdot 53 + (14-1) \cdot (-4)\} = \text{エ} 378 \text{ 答}$$

【類題】第10項が81, 第25項が51の等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和を S_n とする。 S_n が最大になるときの n とそのときの S_n の値を求めよ。

[広島工大]

6 1 等比数列

数学B

/ 50

★★

61 《例題》第2項が5で、初項から第3項までの和が31である等比数列の初項と公比を求めよ。

解答 この数列の初項を a 、公比を r とする。

第2項が5で、初項から第3項までの和が31であるから

$$ar=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad a+ar+ar^2=31 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ を変形すると } a(1+r+r^2)=31$$

$$\text{両辺に } r \text{ を掛けて } ar(1+r+r^2)=31r$$

$$\text{これに } \textcircled{1} \text{ を代入すると } 5(1+r+r^2)=31r \quad \text{整理すると } 5r^2-26r+5=0$$

$$\text{よって } (r-5)(5r-1)=0 \quad \text{ゆえに } r=5, \frac{1}{5}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } r=5 \text{ のとき } a=1, \quad r=\frac{1}{5} \text{ のとき } a=25$$

したがって 初項1, 公比5 または 初項25, 公比 $\frac{1}{5}$ 答

類題 第2項が12で、初項から第3項までの和が52である等比数列の初項と公比を求めよ。

[佛教大]

6 2 分数の数列の和

数学B

/ 50

★★

62 《例題》数列 $\{a_n\}$ は $a_n = \frac{2n+14}{n(n+1)(n+2)}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で与えられている。このとき、

$a_n = \frac{\text{ア} \square}{n(n+1)} - \frac{\text{イ} \square}{(n+1)(n+2)}$ が成り立つ。また、初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_n = \text{ウ} \square - \frac{\text{エ} \square}{n+1} + \frac{\text{オ} \square}{n+2}$ である。 [千葉工大]

解答 $\frac{2n+14}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n(n+1)} - \frac{b}{(n+1)(n+2)}$ とおく。

両辺に $n(n+1)(n+2)$ を掛けると $2n+14 = a(n+2) - bn$

よって $(a-b)n + 2a = 2n + 14$

これは n の恒等式であるから $a-b=2, 2a=14$ これを解いて $a=\text{ア}7, b=\text{イ}5$ ㊟

ゆえに $a_n = \frac{7}{n(n+1)} - \frac{5}{(n+1)(n+2)} = 7\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - 5\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

よって $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 7 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - 5 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$
 $= 7\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - 5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \text{ウ} \frac{9}{2} - \frac{\text{エ}7}{n+1} + \frac{\text{オ}5}{n+2}$ ㊟

類題 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \frac{3n+10}{n(n+1)(n+2)}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定めるとき、初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

63 群数列

数学B

/ 50

★★

63 《例題》{1}, {2, 3}, {3, 4, 5}, {4, 5, 6, 7}, {5, 6, 7, 8, 9}, …… について, この順に並べて
できる次の数列を考える。 [類 東京葉大]

1, 2, 3, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 8, 9, ……

- (1) この数列に初めて 99 が現れるのは, 第 ア 項である。
(2) 数列の第 1999 項は, 第 イ 群の中の第 ウ 番目であり, その数は エ である。ただし,
{1} を第 1 群, {2, 3} を第 2 群, {3, 4, 5} を第 3 群, …… とする。

【解答】(1) $1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$ より, 第 k 群の末項は最初から数えて $\frac{1}{2}k(k+1)$ 番目の
項である。第 k 群の数列は $\{k, k+1, k+2, \cdots, 2k-1\}$ であるから, 99 が第 k 群の末
項であるとする $2k-1=99$ ゆえに $k=50$
よって, 第 50 群の末項に初めて 99 が現れる。

$\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 1275$ であるから, この数列に初めて 99 が現れるのは, 第 ア 1275 項である。【答】

- (2) 第 1999 項が第 l 群に含まれると $\frac{1}{2}(l-1)l < 1999 \leq \frac{1}{2}l(l+1)$

すなわち $(l-1)l < 3998 \leq l(l+1)$ これを満たす自然数 l は $l=63$

このとき, $\frac{1}{2}(l-1)l = \frac{1}{2} \cdot 62 \cdot 63 = 1953$ より $1999 - 1953 = 46$ であるから, 第 1999 項は第

イ 63 群の中の ウ 46 番目の項である。その数は $63 + (46 - 1) = \text{エ}$ 108 【答】

【類題】奇数の列を, 次のように第 n 群が $2n-1$ 個の数を含むように分ける。

{1}, {3, 5, 7}, {9, 11, 13, 15, 17}, {19, 21, 23, 25, 27, 29, 31}, ……

- (1) 第 n 群の最初の自然数を求めよ。(25 点) (2) 2005 は第何群の何番目に現れるか。(25 点)

6 4 階差数列

数学B

50

★★

64 《例題》 次の数列の一般項 a_n と、第 n 項までの和 S_n を求めよ。

[札幌学院大]

4, 7, 14, 25, 40, 59, ……

【解答】 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると、 $\{b_n\}$ は 3, 7, 11, 15, ……これは初項 3, 公差 4 の等差数列であるから $b_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 1) = 4 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 4 + 4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n - (n-1)$$

$$\text{よって } a_n = 2n^2 - 3n + 5 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

初項は $a_1 = 4$ であるから、① は $n = 1$ のときにも成り立つ。したがって、一般項は $a_n = 2n^2 - 3n + 5$ 〇

$$\text{また } S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (2k^2 - 3k + 5) = 2 \sum_{k=1}^n k^2 - 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 5$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 5n$$

$$= \frac{1}{6} n \{ 2(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 30 \} = \frac{1}{6} n (4n^2 - 3n + 23) \quad \text{〇}$$

【類題】 次の数列の一般項 a_n と、第 n 項までの和 S_n を求めよ。

[広島経大]

6, 8, 18, 36, 62, ……

6 5 漸化式 (おき換え)

数学B

/ 50

★★

65 《例題》数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$, $a_{n+1}-3a_n=3^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定義されている。

(1) $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくとき, b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2) b_n を n を用いて表せ。

(3) a_n を n を用いて表せ。

〔北海学園大〕

【解答】 (1) $a_{n+1}-3a_n=3^n$ の両辺を 3^{n+1} (>0) で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{3} \quad \text{答}$$

$$(2) \quad b_1 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}$$

(1) より, 数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$, 公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列であるから

$$b_n = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{3} \quad \text{答}$$

$$(3) \quad a_n = 3^n b_n \text{ であるから} \quad a_n = 3^n \cdot \frac{n}{3} = n \cdot 3^{n-1} \quad \text{答}$$

【類題】 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=0$, $a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定義する。

(1) a_2, a_3 を求めよ。(10点)

(2) $b_n = a_n - 2^n$ とするとき, b_{n+1} を b_n で表せ。(20点)

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(20点)

〔龍谷大〕

6 6 数学的帰納法

数学B

/ 50

★★

66 《例題》 n が自然数のとき、 $2^{3n} - 2^n$ は 6 の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ。

(城西大)

【解答】 「 $2^{3n} - 2^n$ は 6 の倍数である」 …… (A)

[1] $n=1$ のとき $2^{3 \cdot 1} - 2^1 = 6$

よって、(A) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、(A) が成り立つ、すなわち $2^{3k} - 2^k$ は 6 の倍数であると仮定すると、 m を整数として、 $2^{3k} - 2^k = 6m$ と表される。 $n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}
 2^{3(k+1)} - 2^{k+1} &= 2^3 \cdot 2^{3k} - 2 \cdot 2^k = 8 \cdot 2^{3k} - 2 \cdot 2^k \\
 &= 8(2^{3k} - 2^k) + 6 \cdot 2^k \\
 &= 8 \cdot 6m + 6 \cdot 2^k = 6(8m + 2^k)
 \end{aligned}$$

 $8m + 2^k$ は整数であるから、 $2^{3(k+1)} - 2^{k+1}$ は 6 の倍数である。したがって、 $n=k+1$ のときにも (A) は成り立つ。[1], [2] から、すべての自然数 n について (A) が成り立つ。 〔終〕【類題】 すべての自然数 n について、 $3^{2n} + 4^{n+1}$ は 5 の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ。

(中部大)

67 ベクトルの大きさの最小値

数学C

/ 50

★★

67 《例題》 $\vec{a} = (3, -1)$, $\vec{b} = (1, 1)$ のとき, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。

[類 明治学院大]

解答 $\vec{a} + t\vec{b} = (3, -1) + t(1, 1) = (3+t, -1+t)$

よって $|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = (3+t)^2 + (-1+t)^2$ ← $|\vec{p}|$ は $|\vec{p}|^2$ として扱う。

$= 2t^2 + 4t + 10 = 2(t+1)^2 + 8$ ← 平方完成

ゆえに, $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ は $t = -1$ のとき最小値 8 をとる。

$|\vec{a} + t\vec{b}| \geq 0$ であるから, $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ が最小となるとき, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって $t = -1$ のとき最小値 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 答

類題 (1) $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (1, 2)$ のとき, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。(25 点)

[類 共立薬大]

(2) $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (3, -1)$ のとき, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。(25 点)

[類 大阪工大]

68 ベクトルのなす角

数学C

/ 50

★★

68 《例題》 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$ であり, $4\vec{a}-5\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ が直交するとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

(北見工大)

解答 $4\vec{a}-5\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ が直交するから $(4\vec{a}-5\vec{b}) \cdot (2\vec{a}+\vec{b})=0$

$$\text{したがって } 8|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 5|\vec{b}|^2 = 0$$

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$ であるから

$$8 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 5 = 0 \quad \text{よって} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

← θ はベクトルのなす角

$$\Rightarrow 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 60^\circ$ 答

類題 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$ であり, $\vec{a}-\vec{b}$ と $5\vec{a}+2\vec{b}$ が直交するとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

(類 玉川大)

69 交点の位置ベクトル

数学C

/ 50

★★

69 《例題》△OABにおいて、辺OAを3:2に内分する点をM、辺OBを2:1に内分する点をNとし、線分AN、BMの交点をPとする。ベクトル $\overrightarrow{OP}$ をベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

[大分大]

解答 AP:PN=s:(1-s), BP:PM=t:(1-t) とすると

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{ON} = (1-s)\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}s\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OM} + (1-t)\overrightarrow{OB} = \frac{3}{5}t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$$

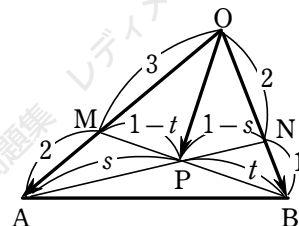
$\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OA} \nparallel \overrightarrow{OB}$ であるから

$$1-s = \frac{3}{5}t, \quad \frac{2}{3}s = 1-t \quad \leftarrow \text{この断りを明記。}$$

$$\text{よって } 5s+3t=5, \quad 2s+3t=3$$

$$\text{これを解いて } s = \frac{2}{3}, \quad t = \frac{5}{9}$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{9}\overrightarrow{OB} \quad \text{答}$$



類題 △OABにおいて、辺OAを1:2に内分する点をM、辺OBを3:2に内分する点をNとし、線分AN、BMの交点をPとする。ベクトル $\overrightarrow{OP}$ をベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

[類 西南学院大]

70 垂直な単位ベクトル

数学C

50

★★

70 《例題》2つのベクトル $\vec{a}=(2, 1, 3)$, $\vec{b}=(1, -1, 0)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。 [信州大]【解答】 求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x, y, z)$ とする。

$$\vec{a} \perp \vec{e} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2x + y + 3z = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \perp \vec{e} \text{ であるから } \vec{b} \cdot \vec{e} = 0 \quad \text{すなわち} \quad x - y = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$|\vec{e}| = 1 \text{ であるから } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } y = x, z = -x$$

$$\text{これらを } \textcircled{3} \text{ に代入すると } x^2 + x^2 + (-x)^2 = 1$$

$$\text{すなわち } 3x^2 = 1 \quad \text{ゆえに } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって、求める単位ベクトルは

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{答}$$

【類題】 2つのベクトル $\vec{a}=(2, 3, -4)$, $\vec{b}=(-3, -2, 1)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

[法政大]

7 1 直線と平面の交点とベクトル

数学C

/ 50

★★

71 《例題》 四面体 $OABC$ において、辺 OA を $1:1$ に内分する点を D 、線分 BD を $3:2$ に内分する点を E 、線分 CE を $3:1$ に内分する点を F 、直線 OF と平面 ABC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ で表せ。 [名古屋市大]

【解答】 E は線分 BD を $3:2$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OD}}{3+2} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right) \\ &= \frac{3}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

F は線分 CE を $3:1$ に内分する点であるから

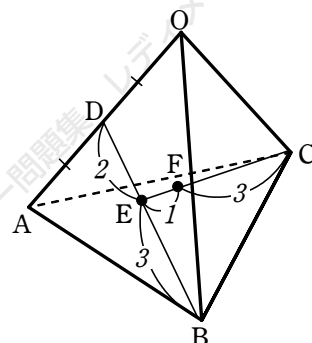
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \frac{\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OE}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) \\ &= \frac{9}{40}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

P は直線 OF 上にあるから、 $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OF}$ (k は実数) と表される。

$$\text{よって } \overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OF}=\frac{9}{40}k\vec{a}+\frac{3}{10}k\vec{b}+\frac{1}{4}k\vec{c}$$

$$P \text{ は平面 } ABC \text{ 上にあるから } \frac{9}{40}k + \frac{3}{10}k + \frac{1}{4}k = 1 \quad \text{よって} \quad k = \frac{40}{31}$$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{OP} = \frac{9}{31}\vec{a} + \frac{12}{31}\vec{b} + \frac{10}{31}\vec{c} \quad \text{□}$$



【類題】 1 辺の長さが 1 の立方体 $ABCD-EFGH$ において、 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおく。

対角線 AG と平面 BDE との交点を P とするとき、 $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。 [類 鳥取大]

7 2 平面に下ろした垂線の足の座標

数学C

/ 50

★★

72 《例題》 3点 $A(1, 0, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(1, -1, 1)$ の定める平面を α とし、原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。このとき、点 H の座標を求めよ。

【解答】 $\overrightarrow{AB}=(-2, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC}=(0, -1, 1)$

H は平面 α 上にあるから、 $\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ (s, t は実数) と表される。

$$\begin{aligned}\text{よって } \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ &= (1, 0, 0) + s(-2, 1, 0) + t(0, -1, 1) \\ &= (1-2s, s-t, t)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC} \text{ であるから } \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\text{ゆえに } (1-2s) \cdot (-2) + (s-t) \cdot 1 + t \cdot 0 = 0 \quad \text{すなわち} \quad 5s - t = 2 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$(1-2s) \cdot 0 + (s-t) \cdot (-1) + t \cdot 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad -s + 2t = 0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ② を解いて } s = \frac{4}{9}, t = \frac{2}{9} \quad \text{したがって、点 } H \text{ の座標は } \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9} \right) \quad \text{答}$$

【類題】 3点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 4)$ の定める平面を α とし、原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。このとき、点 H の座標を求めよ。