内容見本用 目次

実際の書籍には，これと同内容のものが表紙裏に入ります。

ページ	項目名
1	展開の公式
2	因数分解
3	平方根を含む式の計算
4	必要条件と十分条件
5	命題の逆・裏・対偶
6	2次関数のグラフ
7	2次関数の最大・最小
8	2次関数の決定
9	2次方程式
10	2次不等式
11	三角比
12	三角比の相互関係
13	正弦定理・余弦定理
14	三角形の面積
15	集合の要素の個数
16	順列・円順列
17	組合せ
18	確　率
19	反復試行の確率
20	三角形の外心・内心
21	円周角の定理・円に内接する四角形
22	接線と弦の作る角
23	方べきの定理
24	最大公約数と最小公倍数
25	余りに関する証明
26	1次不定方程式の自然数解
27	2次不定方程式の整数解
28	n進数の底，桁数
29	二項定理
30	多項式の割り算，恒等式
31	分数式の計算
32	2次方程式の解と係数の関係

ページ	項目名
33	剰余の定理と因数定理
34	高次方程式
35	2直線の平行・垂直
36	円の接線
37	軌　跡
38	領　域
39	三角関数を含む方程式・不等式
40	加法定理
41	三角関数の最大・最小
42	指数・対数の計算
43	指数・対数の方程式・不等式
44	指数・対数関数の最大・最小
45	接線の方程式
46	関数の増減とグラフ
47	関数の最大・最小
48	定積分の計算
49	面　積
50	等差数列
51	等比数列
52	階差数列
53	数列の和と一般項
54	数学的帰納法
55	ベクトルの演算と成分
56	ベクトルの分解
57	ベクトルの内積
58	ベクトルの図形への応用
59	空間における点の座標
60	空間ベクトルの大きさの最小値

得　点
／50

1　展開の公式　　数学 I

★
1　《**例題**》次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+3)^2$　　(2)　$(a+b-c)^2$

(3)　$(x+3)^2(x-3)^2$　　(4)　$(2x-1)^3$

解答　(1)　$(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2=4x^2+12x+9$　答　　← 公式の適用。

(2)　$(a+b-c)^2=\{(a+b)-c\}^2=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2$　　← $a+b$ を1つのまとまりとして計算する。

$=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$　答

(3)　$(x+3)^2(x-3)^2=\{(x+3)(x-3)\}^2=(x^2-3^2)^2=(x^2-9)^2$　　← 計算の順序を工夫する。

$=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 9+9^2=x^4-18x^2+81$　答

(4)　$(2x-1)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2-1^3$　　← 公式の適用。

$=8x^3-12x^2+6x-1$　答

類　題　次の式を展開せよ。((1)(2) 各10点　(3)(4) 各15点)

(1)　$(2x+3)(3x-1)$　　(2)　$(2x-y+3)^2$

(3)　$(2x+1)(x+2)(2x-1)(x-2)$　　(4)　$(2x+3)^3$

(　　月　　日)　得点　　　／50

2　因数分解　　数学Ⅰ

★ **2** 《**例題**》次の式を因数分解せよ。

(1)　x^2-x-12　　(2)　$2x^2+3x-2$

(3)　ax^2-9ay^2　　(4)　$x^2+xy-6y^2+8x-y+15$

解答 (1)　$x^2-x-12=x^2+(3-4)x+3\cdot(-4)=(x+3)(x-4)$　答　← 公式の適用。

(2)　$2x^2+3x-2=(x+2)(2x-1)$　答

(2)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & & -1 & \longrightarrow & -1 \\ \hline 2 & & -2 & & 3 \end{array}$$

(3)　$ax^2-9ay^2=a(x^2-9y^2)$　← まず，共通因数をくくり出す。

$=a\{x^2-(3y)^2\}$

$=a(x+3y)(x-3y)$　答

(4)　$x^2+xy-6y^2+8x-y+15$

$=x^2+(y+8)x-(6y^2+y-15)$

$=x^2+(y+8)x-(2y-3)(3y+5)$

$=\{x-(2y-3)\}\{x+(3y+5)\}$

$=(x-2y+3)(x+3y+5)$　答

(4)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -(2y-3) & \longrightarrow & -2y+3 \\ 1 & & 3y+5 & \longrightarrow & 3y+5 \\ \hline 1 & & -(2y-3)(3y+5) & & y+8 \end{array}$$

類 **題**　次の式を因数分解せよ。((1)(2) 各10点　(3)(4) 各15点)

(1)　$x^2-2x-35$　　(2)　$3x^2-20x+12$

(3)　$2x^3y-8xy^3$　　(4)　$x^2-2xy-3y^2+4x-8y+3$

(　月　日)

得点
/50

3　平方根を含む式の計算　数学Ⅰ

★
3 《**例題**》次の式を計算せよ。(3) は分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{15}\sqrt{125}}{\sqrt{12}}$　(2) $(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{2})$　(3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

解答 (1) $\dfrac{\sqrt{15}\sqrt{125}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\dfrac{15\times125}{12}}=\sqrt{\dfrac{5\times125}{4}}=\sqrt{\dfrac{25^2}{2^2}}=\dfrac{25}{2}$ 答

(2) $(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{2})=(3-\sqrt{2^2\cdot2})(3+\sqrt{2})=(3-2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$

$=3^2+(-2\sqrt{2}+\sqrt{2})\cdot3-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$=9-3\sqrt{2}-4=5-3\sqrt{2}$ 答

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$　← 分母と分子に $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ を掛ける。

$=\dfrac{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2}=5-2\sqrt{6}$ 答

類 題　次の式を計算せよ。(3) は分母を有理化せよ。((1) 10 点　(2), (3) 各 20 点)

(1) $\sqrt{24}\div\sqrt{3}\times\sqrt{2}$　(2) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{20})$　(3) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

得　点
／50

4　必要条件と十分条件　数学 I

★
4 《例題》 x は実数とする。次の □ にあてはまるものを下の ① ～ ④ の中から選べ。

(1) $x=3$ は，$3x+5=14$ であるための ア□ 。

(2) $x=\sqrt{2}$ は，$x^2=2$ であるための イ□ 。

① 必要条件であるが，十分条件でない　② 十分条件であるが，必要条件でない

③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でもない　〔松山大〕

解答 (1) $x=3$ のとき　$3x+5=3\cdot3+5=14$

よって，「$x=3 \Longrightarrow 3x+5=14$」は真である。

また，$3x+5=14$ のとき　$x=3$

よって，「$3x+5=14 \Longrightarrow x=3$」も真である。

ゆえに，$x=3$ は，$3x+5=14$ であるための必要十分条件である。　答 ア ③

(2) $x=\sqrt{2}$ のとき　$x^2=(\sqrt{2})^2=2$

よって，「$x=\sqrt{2} \Longrightarrow x^2=2$」は真である。

また，「$x^2=2 \Longrightarrow x=\sqrt{2}$」は偽である。（反例：$x=-\sqrt{2}$）

ゆえに，$x=\sqrt{2}$ は，$x^2=2$ であるための十分条件であるが，必要条件でない。　答 イ ②

類題 x，y は実数とする。次の □ にあてはまるものを《例題》の ① ～ ④ の中から選べ。

(1) $x=5$ かつ $y=1$ は，$xy=5$ であるための ア□ 。(25 点)

(2) $x+y=0$ かつ $xy=0$ は，$x=y=0$ であるための イ□ 。(25 点)　〔中央学院大〕

（　月　日）

得　点
/50

5　命題の逆・裏・対偶　　数学 I

★
5 **《例題》** x, y を実数とする。命題「$x+y<0 \Longrightarrow x<0$ または $y<0$」の逆と対偶をいえ。〔大阪工大〕

解答　命題「$x+y<0 \Longrightarrow x<0$ または $y<0$」の逆は

「$x<0$ または $y<0 \Longrightarrow x+y<0$」　答

また，$x+y<0$ の否定は　$x+y \geqq 0$

$x<0$ または $y<0$ の否定は　$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$

よって，命題の対偶は

「$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0 \Longrightarrow x+y \geqq 0$」　答

← 命題 $p \Longrightarrow q$ に対して

$q \Longrightarrow p$ を $p \Longrightarrow q$ の **逆**

$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ を $p \Longrightarrow q$ の **裏**

$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を $p \Longrightarrow q$ の **対偶**

という。

類題　x, y, z を実数とする。命題「$x+y+z \neq 0$ かつ $x \neq y \Longrightarrow x^3+y^3+z^3 \neq 3xyz$」の逆と対偶をいえ。〔類　日本大〕

（　月　日）

得点
/50

6　2次関数のグラフ　数学 I

★

6 《**例題**》 (1)　2次関数 $y=-x^2+6x+3$ のグラフをかき，軸と頂点を求めよ。

(2)　2次関数 $y=2x^2+3x-1$ のグラフを x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動したものをグラフとする2次関数を求めよ。

〔(2) 山梨学院大〕

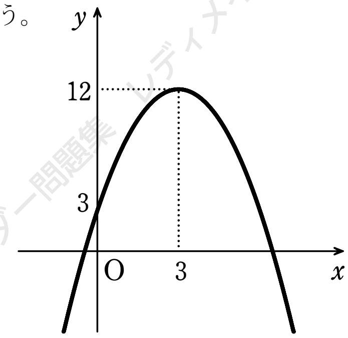
解答 (1)　$y=-x^2+6x+3=-(x^2-6x)+3$　← 平方完成を行う。

$=-\{(x^2-2\cdot 3x+3^2)-3^2\}+3$

$=-(x-3)^2+3^2+3$

$=-(x-3)^2+12$

よって，この関数のグラフは右の図のようになる。答



また，軸は　直線 $x=3$，

頂点は　点 $(3,\ 12)$　である。答

(2)　$y=2x^2+3x-1$ のグラフを x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$y+2=2(x-3)^2+3(x-3)-1$　← $y=f(x)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると $y-q=f(x-p)$

すなわち　$y=2x^2-9x+6$　答

類題 (1)　2次関数 $y=2x^2+2x+1$ のグラフをかき，軸と頂点を求めよ。(25点)

(2)　2次関数 $y=-x^2+2x$ のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものをグラフとする2次関数を求めよ。(25点)

〔(2) 獨協大〕

(　月　日)　得点　／50

7　2次関数の最大・最小　　数学Ⅰ

★
7 《例題》 (1)　2次関数 $y=x^2-4x+7$ の最小値を求めよ。　〔日本歯大〕

(2)　関数 $y=-x^2-6x-1$ $(-4\leqq x\leqq -1)$ の最大値と最小値を求めよ。　〔法政大〕

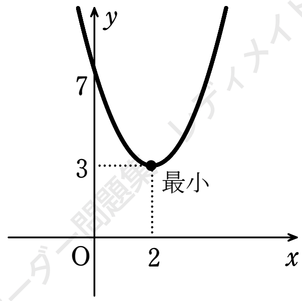
解答 (1)　$y=x^2-4x+7=(x-2)^2+3$

この関数のグラフは下に凸で，右の図のようになる。

したがって，

$x=2$ で最小値 3

をとる。 答



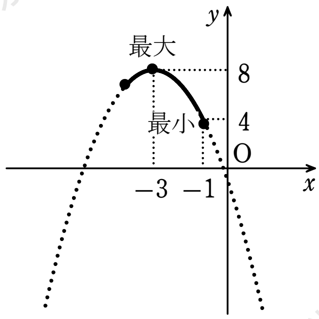
(2)　$y=-x^2-6x-1=-(x+3)^2+8$

よって，この関数のグラフは右の図の実線部分である。

したがって，$x=-3$ で最大値 8,

$x=-1$ で最小値 4

をとる。 答



類題 (1)　2次関数 $y=-3x^2+12x+15$ の最大値を求めよ。(20点)　〔金沢学院大〕

(2)　関数 $y=2x^2-3x+5$ $(-2\leqq x\leqq 3)$ の最大値と最小値を求めよ。(30点)　〔北海道工大〕

得　点
/50

8　２次関数の決定　数学 I

★
8 《**例題**》グラフが次の条件を満たす x の 2 次関数を求めよ。

(1)　軸が直線 $x=-1$ で，2 点 $(-2,\ 2)$，$(1,\ 14)$ を通る。〔東京家政大〕

(2)　3 点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 3)$，$(-2,\ 5)$ を通る。〔北海道医療大〕

解答 (1)　軸が直線 $x=-1$ であるから，求める 2 次関数を $y=a(x+1)^2+q$ とおく。

点 $(-2,\ 2)$ を通るから　$2=a(-2+1)^2+q$　すなわち　$a+q=2$ ……①

点 $(1,\ 14)$ を通るから　$14=a(1+1)^2+q$　すなわち　$4a+q=14$ ……②

②−①から　$3a=12$　よって　$a=4$ ……③

③ を ① に代入して　$4+q=2$　よって　$q=-2$

ゆえに，求める 2 次関数は　$y=4(x+1)^2-2$　すなわち　$y=4x^2+8x+2$ 答

(2)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。

点 $(0,\ 0)$ を通るから　$0=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c$　すなわち　$c=0$ ……①

点 $(2,\ 3)$ を通るから　$3=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$　すなわち　$4a+2b+c=3$ ……②

点 $(-2,\ 5)$ を通るから　$5=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c$　すなわち　$4a-2b+c=5$ ……③

②−③から　$4b=-2$　よって　$b=-\dfrac{1}{2}$ ……④

①，④ を ② に代入して　$4a+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+0=3$　ゆえに　$a=1$

したがって，求める 2 次関数は　$y=x^2-\dfrac{1}{2}x$ 答

類題　グラフが次の条件を満たす x の 2 次関数を求めよ。(25 点×2)

(1)　軸が直線 $x=2$ で，2 点 $(3,\ 2)$，$(-1,\ 6)$ を通る。〔中央学院大〕

(2)　3 点 $(-1,\ -3)$，$(1,\ 5)$，$(2,\ 3)$ を通る。〔国士舘大〕

(月 日) | 得 点 | $\diagup 50$

9 2次方程式

数学 I

★
9 《**例題**》次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2+2x-15=0$ (2) $3x^2+2x-5=0$ (3) $2x^2-3x-1=0$

解答 (1) 左辺を因数分解して $(x+5)(x-3)=0$

よって $x=-5,\ 3$ 答

(2) 左辺を因数分解して $(3x+5)(x-1)=0$

よって $x=-\dfrac{5}{3},\ 1$ 答

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 5 & \longrightarrow & 5 \\ 1 & & -1 & \longrightarrow & -3 \\ \hline 3 & & -5 & & 2 \end{array}$$

(3) 解の公式より

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$$ 答

← 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

類 **題** 次の 2 次方程式を解け。((1), (2) 各 15 点 (3) 20 点)

(1) $x^2-x-12=0$ (2) $2x^2-7x-15=0$ (3) $2x^2+2x-1=0$

得　点
／50

１０　２次不等式　　数学Ⅰ

★
10 《**例題**》次の２次不等式を解け。

(1)　$x^2-4x+3\leqq 0$　　(2)　$x^2+x-1>0$　　(3)　$x^2-2x+1<0$

解答 (1)　２次方程式 $x^2-4x+3=0$ を解く。

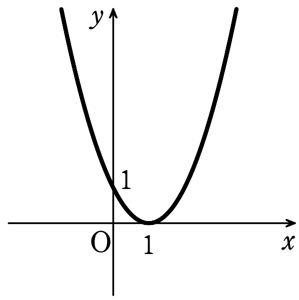
$(x-1)(x-3)=0$ から　　$x=1,\ 3$

よって，この２次不等式の解は　　$1\leqq x\leqq 3$　答

(2)　２次方程式 $x^2+x-1=0$ を解くと　　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

よって，この２次不等式の解は　　$x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<x$　答

(3)　２次関数 $y=x^2-2x+1$ すなわち $y=(x-1)^2$ のグラフは右の図のようになり，x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接している。



よって　$x\fallingdotseq 1$ のとき　$y>0$

$x=1$ のとき　$y=0$

したがって，この２次不等式の解は　ない　答

類 題　次の２次不等式を解け。((1), (2) 各 15 点　(3) 20 点)

(1)　$3x^2-17x+10\leqq 0$　　(2)　$3x^2-5x+1<0$　　(3)　$64x^2-176x+121>0$

得　点
／50

１１　三角比　　数学Ⅰ

★
11 《**例題**》あなたは木の高さを測ろうとしている。木から 10 m 離れた地点で，木の先端を見上げる角度を測ったら，30° であった。目線の高さを 1.5 m として，この木の高さを求めよ。ただし，$\tan 30° = 0.6$，$\sin 30° = 0.5$，$\cos 30° = 0.9$ として計算せよ。〔関西大〕

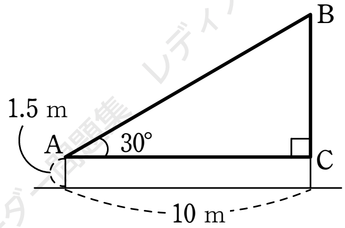
解答 右の図のように，目の位置を A，木の先端を B，木の一部で目の高さと同じ位置を C とする。
このとき，木の高さは

$$BC + 1.5 \ (\mathrm{m})$$

と表される。
よって

$$\begin{aligned} BC + 1.5 &= AC\tan 30° + 1.5 \\ &= 10 \times 0.6 + 1.5 \\ &= 7.5 \ \mathrm{m} \end{aligned}$$

答



類 **題**　ある山のケーブルカーの軌道は水平面と 22° の傾きになっている。このケーブルカーの麓の駅 A と山頂駅 B との直線距離が 500 m であるとき，山頂駅 B の地点は麓の駅 A の地点よりも何 m 高いか。ただし，$\sin 22° = 0.3746$ とし，小数第 1 位を四捨五入して答えよ。〔立教大〕

１２　三角比の相互関係　数学 I

★
12 《例題》 (1) 角 θ が鋭角で，$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。〔中央大〕

(2) $0°\leqq\theta\leqq180°$ で，$\tan\theta=7$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。〔明海大〕

解答 (1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

θ が鋭角であるから　$\cos\theta>0$

よって　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 答

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{3}\div\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 答

(2) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+7^2}=\dfrac{1}{50}$

$\tan\theta>0$ であるから　$0°<\theta<90°$　ゆえに　$\cos\theta>0$

よって　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{50}}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ 答

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=7\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{10}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ 答　← $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から。

類 題 (1) $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。ただし，$0°<\theta<180°$ とする。

(25 点)〔北海道工大〕

(2) $0°<\theta<90°$ で，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。(25 点)〔大阪商大〕

１３　正弦定理・余弦定理　　数学Ⅰ

★
13 《例題》 (1)　△ABC において，$\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$BC=2\sqrt{6}$ のとき，外接円の半径と CA を求めよ。〔千葉工大〕

(2)　△ABC において，$\angle A=60^\circ$，$AB=4$，$BC=5$ のとき，CA を求めよ。〔千葉工大〕

解答 (1)　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により　$\dfrac{BC}{\sin\angle A}=2R$

よって　$R=\dfrac{BC}{2\sin\angle A}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sin 45^\circ}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{3}$　答

また，正弦定理により　$\dfrac{CA}{\sin\angle B}=2R$

したがって　$CA=2R\sin\angle B=2\cdot2\sqrt{3}\sin 60^\circ=2\cdot2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6$　答

(2)　△ABC において，余弦定理により

$$BC^2=CA^2+AB^2-2CA\cdot AB\cos\angle A$$

すなわち　$5^2=CA^2+4^2-2CA\cdot4\cos60^\circ$

よって　$5^2=CA^2+4^2-2CA\cdot4\cdot\dfrac{1}{2}$　整理すると　$CA^2-4CA-9=0$

これを解くと　$CA=2\pm\sqrt{13}$　　$CA>0$ であるから　$CA=2+\sqrt{13}$　答

類題 (1)　△ABC において，$BC=9$，$\angle B=45^\circ$，$\angle C=105^\circ$ のとき，CA と外接円の半径を求めよ。(25 点)〔武蔵大〕

(2)　△ ABC において，$\angle A=150^\circ$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{7}$ のとき，CA を求めよ。(25 点)

得　点
／50

１４　三角形の面積　　数学Ⅰ

★
14 《**例題**》 (1)　BC$=4$，CA$=5$，$\angle$C$=30°$ である △ABC の面積を求めよ。　〔鹿児島大〕

(2)　△ABC において，BC$=5$，CA$=6$，AB$=7$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。　〔岐阜聖徳学園大〕

解答　(1)　△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\sin\angle\mathrm{C}=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\sin30°=\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{2}=5$$ 答

(2)　△ABC において，余弦定理により

$$\cos A=\frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot6\cdot7}=\frac{5}{7}$$ 答

$0°<A<180°$ であるから　$\sin A>0$

よって　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

したがって，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A=\frac{1}{2}\cdot6\cdot7\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6}$$ 答

類 題　(1)　AB$=5$，AC$=8$，$\angle$BAC$=60°$ である △ABC の面積を求めよ。(15 点)　〔類　北海学園大〕

(2)　△ABC において，AB$=6$，BC$=7$，CA$=9$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。(35 点)　〔愛知大〕

得　点
／50

１５　集合の要素の個数　　数学Ａ

★
15 《例題》 1 から 50 までの自然数のうち，次の数は何個あるか。 〔北海道東海大〕

(1) 5 で割り切れる　　(2) 7 で割り切れる

(3) 5 でも 7 でも割り切れる　　(4) 5 または 7 で割り切れる

解答 1 から 50 までの自然数のうち，5 で割り切れる数の集合を A，7 で割り切れる数の集合を B とする。

(1) $A=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot10\}$

よって，求める個数は　$n(A)=10$（個）　答

(2) $B=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot7\}$

よって，求める個数は　$n(B)=7$（個）　答

(3) 5 でも 7 でも割り切れる数の集合は $A\cap B$ と表され，これは 5 と 7 の最小公倍数 35 で割り切れる数の集合である。

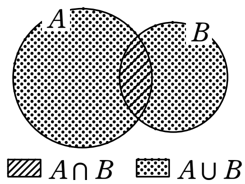
$A\cap B=\{35\cdot1\}$ であるから，求める個数は

$n(A\cap B)=1$（個）　答

(4) 5 または 7 で割り切れる数の集合は $A\cup B$ と表される。

よって，求める個数は

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=10+7-1=16\text{（個）}$$　答



類 題 1 から 200 までの自然数のうち，次の数は何個あるか。 〔愛知学院大〕

(1) 3 で割り切れる　(10 点)　　(2) 5 で割り切れる　(10 点)

(3) 3 でも 5 でも割り切れる　(15 点)　　(4) 3 または 5 で割り切れる　(15 点)

(月 日) | 得 点 | /50

１６　順列・円順列　　数学Ａ

★
16 《例題》 (1) 5 個の数字 0, 1, 2, 3, 4 から異なる 4 個を取り出してできる 4 桁の偶数は何個あるか。〔法政大〕

(2) 6 人が円形のテーブルの席に着く方法は何通りあるか。〔恵泉女学園大〕

解答 (1) 偶数となるのは一の位が 0, 2, 4 の場合である。

[1] 一の位が 0 の場合

千，百，十の位には残り 4 個の数字から 3 個取る順列で

$${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24 \text{ (個)}$$

[2] 一の位が 2 または 4 の場合

千の位には 0 以外の 3 個の中から取り出し，百，十の位には千と一の位で取り出した数字以外の 3 個の中から 2 個取る順列で

$$3\times{}_3P_2\times2=3\times3\cdot2\times2=36 \text{ (個)}$$

[1], [2] から，求める偶数は全部で $24+36=60$ (個) 答

(2) 6 人の円順列であるから，求める方法は

$$(6-1)!=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120 \text{ (通り)}$$ 答

類 題 (1) 6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 個を取り出してできる 3 桁の奇数は何個あるか。(30 点)〔拓殖大〕

(2) 7 人が円形のテーブルの席に着く方法は何通りあるか。(20 点)〔広島修道大〕

（　月　日）

得　点
／50

１７　組合せ　数学Ａ

★ 17 《例題》 (1)　男子 6 人，女子 4 人の中から 4 人の代表を選ぶとき，男子 2 人，女子 2 人を選ぶ方法は何通りあるか。 〔中央学院大〕

(2)　DOKKYO の 6 文字をすべて使って文字列を作るとき，何通りの文字列ができるか。 〔獨協大〕

解答 (1)　男子 6 人から 2 人を選ぶ方法は ${}_6C_2$ 通りある。

そのおのおのに対して，女子 4 人から 2 人を選ぶ方法は ${}_4C_2$ 通りある。

よって，求める方法の総数は　${}_6C_2\times{}_4C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=90$（通り） 答

(2)　DOKKYO の 6 文字の中には O が 2 個，K が 2 個，D，Y が 1 個ずつある。

よって，求める文字列の総数は

$$\frac{6!}{2!\,2!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=180\text{（通り）}$$ 答　← 同じものを含む順列

類題 (1)　店頭にあるパン 10 種類とジュース 8 種類の中からパン 3 種類とジュース 2 種類を選んで購入するとき，組合せは何通りあるか。(25 点) 〔道都大〕

(2)　NARADAI の 7 文字をすべて使って文字列を作るとき，何通りの文字列ができるか。(25 点) 〔奈良大〕

（　月　日）　得点　／50

１８　確　率　　数学Ａ

★ 18 《例題》 1 から 9 までの番号の付いた 9 枚のカードから 2 枚抜き出すとき，カードの番号が 2 枚とも素数でない確率を求めよ。また，2 枚のうち少なくとも 1 枚の番号が素数である確率を求めよ。

〔近畿大〕

解答　全部の 9 枚から 2 枚抜き出す組合せは ${}_9C_2$ 通りある。

また，9 枚のうち素数のカードは 2，3，5，7 の 4 枚あり，素数でないカードは 5 枚ある。

この 5 枚から 2 枚抜き出す組合せは ${}_5C_2$ 通りある。

よって，2 枚とも素数でない確率は

$$\frac{{}_5C_2}{{}_9C_2}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\div\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=\frac{5}{18}$$ 答

また，「少なくとも 1 枚が素数である」という事象は，「2 枚とも素数でない」という事象の余事象である。

よって，少なくとも 1 枚が素数である確率は

$$1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$$ 答

類題　15 個の電球の中に不合格品が 3 個含まれている。この中から 3 個の電球を同時に取り出すとき，3 個すべてが合格品である確率を求めよ。また，少なくとも 1 個の不合格品が含まれる確率を求めよ。

〔愛知学泉大〕

（　月　日）

19　反復試行の確率	数学A	得点 ／50

★ 19 《例題》 5セットマッチ(先に3セットとった方が勝ち)のテニスの試合で，まったく実力が同じA，B 2人の選手が対戦するとき，セットカウント3−2でAが勝つ確率を求めよ。〔立教大〕

解答 1〜4セットでセットカウントを2−2として，5セット目をAがとる場合である。

1つのセットをAがとる確率は$\frac{1}{2}$で，Bがとる確率も$\frac{1}{2}$である。

よって，1〜4セットでセットカウント2−2となる確率は

$$ {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{3}{8} $$　← 反復試行の確率

5セット目をAがとる確率は$\frac{1}{2}$であるから，求める確率は

$$ \frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16} $$ 答

類題 1枚の硬貨を何回か投げて，表の出た回数が3回になったところでやめることにする。ちょうど7回投げたところでやめることになる確率を求めよ。〔国士舘大〕

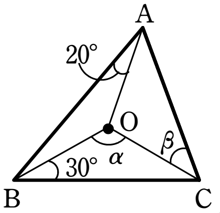
（　月　日）

得　点
／50

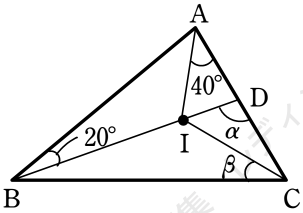
２０　三角形の外心・内心　数学Ａ

★
20 《例題》 △ABC の外心を O，内心を I とする。下の図の角 α，β を求めよ。

(1)



(2)



解答 (1)　OB＝OC であるから　　$\angle OCB=\angle OBC=30^\circ$

△OBC において，内角の和は 180° であるから

$\alpha+30^\circ\times 2=180^\circ$　　よって　$\alpha=120^\circ$　答

また，OA＝OB＝OC であるから　$\angle OBA=\angle OAB=20^\circ$，$\angle OAC=\angle OCA=\beta$

△ABC において，内角の和は 180° であるから

$20^\circ\times 2+30^\circ\times 2+\beta\times 2=180^\circ$　　よって　$\beta=40^\circ$　答

(2)　I は △ABC の内心であるから

$\angle BAD=2\cdot 40^\circ=80^\circ$，　$\angle ABC=2\cdot 20^\circ=40^\circ$，　$\angle ACB=2\beta$

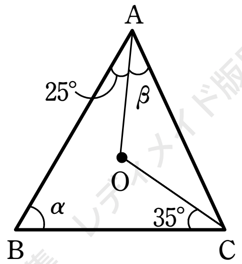
$\angle BDC=\angle BAD+\angle ABD$ であるから　$\alpha=80^\circ+20^\circ=100^\circ$　答

また，△ABC の内角の和は 180° であるから

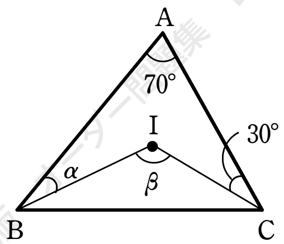
$80^\circ+40^\circ+2\beta=180^\circ$　　よって　$\beta=30^\circ$　答

類題　△ABC の外心を O，内心を I とする。下の図の角 α，β を求めよ。(25 点×2)

(1)



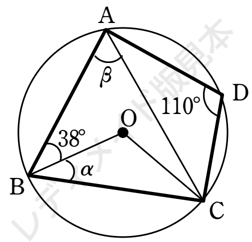
(2)



（　月　日）　得　点　／50

21　円周角の定理・円に内接する四角形　数学Ａ

★
21 《例題》　右の図のように，円 O に内接する四角形 ABCD がある。
このとき，角 α，β を求めよ。



解答　四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ADC}=180^\circ$　← 対角の和が 180°

よって　$\angle\mathrm{ABC}=180^\circ-\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-110^\circ=70^\circ$

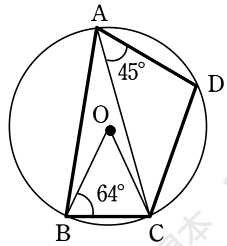
したがって　$\alpha=70^\circ-38^\circ=32^\circ$　答

$\triangle\mathrm{OBC}$ は $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ の二等辺三角形であるから　$\angle\mathrm{OCB}=\angle\mathrm{OBC}=32^\circ$

ゆえに　$\angle\mathrm{BOC}=180^\circ-32^\circ\times 2=116^\circ$

円周角の定理により　$\beta=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{1}{2}\times 116^\circ=58^\circ$　答

類題　右の図のように，円 O に内接する四角形 ABCDがある。
$\angle\mathrm{OBC}=64^\circ$，$\angle\mathrm{CAD}=45^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{BOC}$，$\angle\mathrm{BCD}$ の大きさを求めよ。

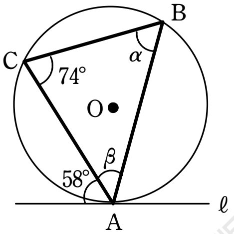


（　月　日）　得点　／50

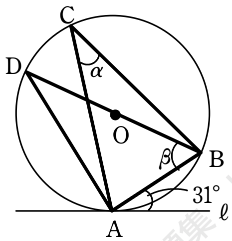
２２　接線と弦の作る角　数学Ａ

★
22 《例題》　下の図において，直線 ℓ は円 O の接線で，A はその接点である。角 α，β を求めよ。

(1)



(2)



解答　(1)　接線と弦の作る角により　　$\alpha=58°$　答

また，△ABC の内角の和は 180° であるから　　$\beta+58°+74°=180°$

よって　　$\beta=180°-58°-74°=48°$　答

(2)　接線と弦の作る角により　　$\alpha=31°$　答

また，弧 AB に対する円周角は等しいから　　$\angle ADB=\angle ACB=31°$

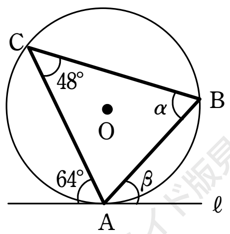
BD は円の直径であるから　　$\angle BAD=90°$

△ABD の内角の和は 180° であるから　　$90°+\beta+31°=180°$

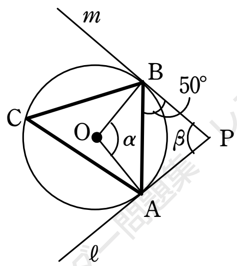
よって　　$\beta=180°-90°-31°=59°$　答

類題　下の図において，直線 ℓ，m は円 O の接線である。角 α，β を求めよ。(25 点×2)

(1)



(2)



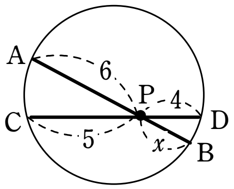
（　月　日）

得　点
／50

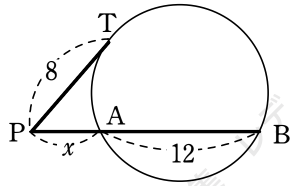
２３　方べきの定理　　数学Ａ

★
23 **《例題》**　下の図において，x の値を求めよ。線分 PT は円の接線である。

(1)



(2)



解答　(1)　方べきの定理により　　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

よって　　$6 \cdot x = 5 \cdot 4$　　　ゆえに　$x = \dfrac{10}{3}$　答

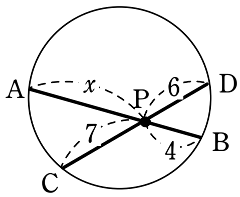
(2)　方べきの定理により　　$PA \cdot PB = PT^2$

よって　　$x(x+12) = 8^2$　　　ゆえに　$x^2 + 12x - 64 = 0$

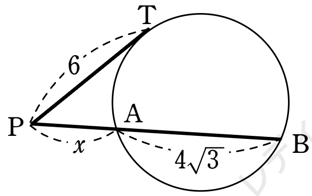
すなわち　$(x-4)(x+16) = 0$　　　$x > 0$ であるから　　$x = 4$　答

類題　下の図において，x の値を求めよ。線分 PT は円の接線である。((1) 20 点　(2) 30 点)

(1)



(2)



（　月　日）

得　点
／50

２４　最大公約数と最小公倍数　数学Ａ

★
24 《例題》 最大公約数が 9，最小公倍数が 486 である 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

解答 最大公約数が 9 であるから，a，b は $a=9a'$，$b=9b'$ と表される。
ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。
このとき，a，b の最小公倍数は $9a'b'$ と表されるから　$9a'b'=486$
すなわち　$a'b'=54$
$a'b'=54$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は
$(a',\ b')=(1,\ 54),\ (2,\ 27)$
よって　$(a,\ b)=(9,\ 486),\ (18,\ 243)$ 答

類題　次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　最大公約数が 15，最小公倍数が 300　(25 点×2)

(2)　最大公約数が 12，最小公倍数が 288

得　点
／50

２５　余りに関する証明　数学Ａ

★
25 **《例題》**　n は整数とする。n^2+n+2 は 3 の倍数でないことを証明せよ。

解答　すべての整数 n は，$3k$，$3k+1$，$3k+2$（k は整数）のいずれかの形で表される。

[1]　$n=3k$ のとき

$$n^2+n+2=(3k)^2+3k+2=9k^2+3k+2=3(3k^2+k)+2$$

[2]　$n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned}n^2+n+2&=(3k+1)^2+(3k+1)+2=9k^2+9k+4\\&=3(3k^2+3k+1)+1\end{aligned}$$

[3]　$n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned}n^2+n+2&=(3k+2)^2+(3k+2)+2=9k^2+15k+8\\&=3(3k^2+5k+2)+2\end{aligned}$$

よって，n^2+n+2 を 3 で割ったときの余りは 1 か 2 であるから，n^2+n+2 は 3 の倍数でない。　終

類題　n は整数とする。n^2+5n+2 は 3 の倍数でないことを証明せよ。

（　月　日）

得　点
／50

２６　１次不定方程式の自然数解　数学Ａ

★
26 《例題》 等式 $3x+2y=15$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

解答 $3x+2y=15$ から　$2y=3(5-x)$ ……①

$y>0$ であるから　$3(5-x)>0$　よって　$x<5$ ……②

① において，$2y$ は偶数であるから，$3(5-x)$ は偶数である。

これと ② を満たす自然数 x は　$x=1$, 3

したがって，求める自然数 x, y の組は　$(x,\ y)=(1,\ 6),\ (3,\ 3)$ 答

参考 2 と 3 は互いに素であるから，① より　$y=3k$, $5-x=2k$ （k は整数）

よって　$x=-2k+5$, $y=3k$ （k は整数）

$x\geqq1$, $y\geqq1$ であることを利用して，k の値を絞り込んでもよい。

類 題　次の等式を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。(25 点×2)

(1) $3x+5y=35$

(2) $9x+2y=47$

（　月　日）

得　点
／50

２７　２次不定方程式の整数解　数学Ａ

★
27 《例題》 方程式 $xy-2x+3y-1=0$ の整数解をすべて求めよ。

解答 与えられた方程式は，次のように変形できる。

$(x+3)(y-2)+6-1=0$　　すなわち　　$(x+3)(y-2)=-5$

x，y は整数であるから，$x+3$，$y-2$ は整数である。

よって　$(x+3,\ y-2)=(-5,\ 1),\ (-1,\ 5),\ (1,\ -5),\ (5,\ -1)$

したがって　$(x,\ y)=(-8,\ 3),\ (-4,\ 7),\ (-2,\ -3),\ (2,\ 1)$ 答

類 題　次の方程式の整数解をすべて求めよ。((1)(2) 各 15 点　(3) 20 点)

(1)　$(x+1)(y-2)=3$

(2)　$xy+3x-4y-5=0$

(3)　$2xy-6x+y-9=0$

（　月　日）

得　点
／50

２８　n 進法で表された数　数学Ａ

★
28 《例題》 (1)　10 進法で表された数 145 を n 進法で表すと $221_{(n)}$ となるような 3 以上の自然数 n を求めよ。

(2)　5 進法で表したとき，4 桁となるような数の個数を 10 進数で答えよ。

解答 (1)　条件から　$145=2\cdot n^2+2\cdot n^1+1\cdot n^0$

整理すると　$2n^2+2n-144=0$

すなわち　$2(n+9)(n-8)=0$

n は 3 以上の自然数であるから　$n=8$　答

(2)　5 進法で表したとき，4 桁となる数は，○□□□$_{(5)}$ の ○ に 1，2，3，4 のどれかを入れ，3 個の □ のそれぞれに 0，1，2，3，4 のどれかを入れた数である。

このような数の個数は　$4\times5^3=500$（個）　答

類 題 (1)　10 進法で表された数 128 を n 進法で表すと $332_{(n)}$ となるような 4 以上の自然数 n を求めよ。

(2)　4 進法で表したとき，5 桁となるような数の個数を 10 進数で答えよ。　(25 点×2)

（　月　日）

得　点
/50

２９　二項定理　数学Ⅱ

★

29 《例題》 (1) $\left(3x+\dfrac{y}{3}\right)^6$ の展開式における x^2y^4 の係数を求めよ。 〔千葉工大〕

(2) $(x-2y+z)^5$ の展開式における x^2y^2z の係数を求めよ。 〔東京電機大〕

解答 (1) $\left(3x+\dfrac{y}{3}\right)^6$ の展開式において，x^2y^4 を含む項は

$${}_6C_4(3x)^{6-4}\left(\frac{y}{3}\right)^4={}_6C_2(3x)^2\left(\frac{y}{3}\right)^4={}_6C_2 3^2\cdot\frac{1}{3^4}x^2y^4$$

よって，x^2y^4 の係数は　${}_6C_2 3^2\cdot\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot3^2\cdot\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{5}{3}$ 答

← $(a+b)^n$ の展開式における一般項は　${}_nC_r a^{n-r}b^r$

(2) $(x-2y+z)^5$ の展開式において，x^2y^2z を含む項は

$$\frac{5!}{2!\,2!\,1!}x^2(-2y)^2z=\frac{5!}{2!\,2!\,1!}\cdot(-2)^2x^2y^2z$$

よって，x^2y^2z の係数は

$$\frac{5!}{2!\,2!\,1!}\cdot(-2)^2=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1}\cdot4=120$$ 答

← $(a+b+c)^n$ の展開式における一般項は

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$$

ただし　$p+q+r=n$

類 題 (1) $\left(\dfrac{1}{2}x-2y\right)^8$ の展開式における x^5y^3 の係数を求めよ。(25 点) 〔金沢工大〕

(2) $(x+2y-3z)^6$ の展開式における x^3y^2z の係数を求めよ。(25 点) 〔京都産大〕

（　月　日）

得　点
/50

３０　多項式の割り算，恒等式　　数学Ⅱ

★
30 **《例題》** x の多項式 x^3+px^2+x+q が $(x-1)^2$ で割り切れるならば，$p=$ ア$\boxed{}$，$q=$ イ$\boxed{}$ である。

［昭和薬大］

解答 右の割り算から，x^3+px^2+x+q を $(x-1)^2$ すなわち x^2-2x+1 で割ったときの余りは

$(2p+4)x-p+q-2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+(p+2) \\ \hline
x^2-2x+1 & x^3+px^2+x+q \\
 & x^3-2x^2+x \\ \hline
 & (p+2)x^2+q \\
 & (p+2)x^2-(2p+4)x+p+2 \\ \hline
 & (2p+4)x-p+q-2
\end{array}
$$

余りは0であるから，恒等式

$(2p+4)x-p+q-2=0$ が成り立つ。

よって　$2p+4=0$，$-p+q-2=0$

これを解いて　$p=$ ア-2，$q=$ イ0　答

別解 x^3+px^2+x+q が $(x-1)^2$ で割り切れるとき，商は $x+c$ とおけて，次の等式が成り立つ。

$$x^3+px^2+x+q=(x-1)^2(x+c)$$

右辺を展開して整理すると　$x^3+px^2+x+q=x^3+(c-2)x^2+(-2c+1)x+c$

これは x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$p=c-2$ ……①，　$1=-2c+1$ ……②，　$q=c$ ……③

② から　$c=0$　　これを ①，③ に代入して　$p=$ ア-2，$q=$ イ0　答

類 **題**　x^3-2x^2+ax+b が $(x-3)^2$ で割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ。　［札幌大］

得　点
／50

３１　分数式の計算　　数学Ⅱ

★
31 《例題》 $\dfrac{ab}{(a-c)(c-b)}+\dfrac{ac}{(b-a)(c-b)}+\dfrac{bc}{(a-b)(c-a)}$ を簡単にせよ。 〔近畿大〕

解答 $(与式)=\dfrac{ab(a-b)+ac(c-a)+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

ここで　$(分子)=a^2b-ab^2+ac^2-a^2c+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b^2c-bc^2)$　　← a について整理

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$　　← 式を整理

よって　$(与式)=-\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$　答

類 題 (ア)　$a^3b-ab^3+b^3c-bc^3+c^3a-ca^3$ を因数分解すると $(a-b)(a-c)(b-c)\times\boxed{}$ となる。(25点)

(イ)　$\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ を計算せよ。(25点) 〔横浜市大〕

（　月　日）

得　点
／50

３２　２次方程式の解と係数の関係　数学Ⅱ

★
32 《**例題**》　2 次方程式 $x^2-3x+7=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$(\alpha-\beta)^2$，$\dfrac{1}{\alpha-2}+\dfrac{1}{\beta-2}$ の値を求めよ。〔北海道薬大〕

解答　解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{-3}{1}=3$，　$\alpha\beta=\dfrac{7}{1}=7$

よって　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\cdot7=-19$　答

$$\frac{1}{\alpha-2}+\frac{1}{\beta-2}=\frac{\beta-2+\alpha-2}{(\alpha-2)(\beta-2)}=\frac{\alpha+\beta-4}{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4}=\frac{3-4}{7-2\cdot3+4}=-\frac{1}{5}$$　答

参考　よく使われる変形の例

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$，$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$ など

類題　2 次方程式 $x^2+4x-1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　(10 点)

(2)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$　(10 点)

(3)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　(15 点)

(4)　$\alpha^3+\beta^3$　(15 点)　〔武蔵野大〕

(月 日) | 得 点

３３ 剰余の定理と因数定理 数学Ⅱ

/50

★
33 《例題》(1) x^3-x^2-4x+6 を $2x-1$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) x^3+ax+b を $x-1$ で割れば余りが 12 となり，$x+1$ で割れば余りが -4 となるとき，定数 a，b の値を求めよ。 〔(2) 摂南大〕

解答 (1) $P(x)=x^3-x^2-4x+6$ とすると，求める余りは

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+6=\frac{31}{8}$$ 答

(2) $P(x)=x^3+ax+b$ とする。

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 12 となるための条件は

$P(1)=12$ すなわち $1^3+a\cdot1+b=12$

よって $a+b=11$ ……①

$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが -4 となるための条件は

$P(-1)=-4$ すなわち $(-1)^3+a\cdot(-1)+b=-4$

よって $-a+b=-3$ ……②

①，② を解いて $a=7$，$b=4$ 答

類 題 (1) x^3-3x^2+5x+2 を $3x+1$ で割ったときの余りを求めよ。(15 点)

(2) $x^3+ax^2-2bx+4$ を $x+2$ で割ると 12 余り，$x-1$ で割ると 3 余る。このとき，定数 a，b の値を求めよ。(35 点) 〔(2) 山梨学院大〕

得　点
／50

３４　高次方程式　　数学Ⅱ

★
34 **《例題》** 次の方程式を解け。

(1)　$x^4+2x^2-3=0$　　　(2)　$x^3+x+2=0$　　　〔(2) 福井工大〕

解答　(1)　$x^4+2x^2-3=0$ から　$(x^2-1)(x^2+3)=0$　　　← $x^2=t$ とおくと $t^2+2t-3=(t-1)(t+3)$

よって　$x^2-1=0$　または　$x^2+3=0$

したがって　$x=\pm 1,\ \pm\sqrt{3}\,i$　答

(2)　$P(x)=x^3+x+2$ とすると

$$P(-1)=(-1)^3+(-1)+2=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

右の割り算により　$P(x)=(x+1)(x^2-x+2)$

ゆえに，方程式は　$(x+1)(x^2-x+2)=0$

よって　$x+1=0$　または　$x^2-x+2=0$

$x+1=0$ から　$x=-1$

$x^2-x+2=0$ から

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$$

したがって　$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$　答

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-x+2 \\
\hline
x+1 & x^3\qquad +x+2 \\
 & x^3+x^2 \\
\hline
 & -x^2+x \\
 & -x^2-x \\
\hline
 & 2x+2 \\
 & 2x+2 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

類題　次の方程式を解け。

(1)　$x^4+x^2-6=0$　(20 点)　〔国士舘大〕　　　(2)　$x^3-x-6=0$　(30 点)　〔甲南大〕

（　月　日）

得点
/50

３５　２直線の平行・垂直　数学Ⅱ

★
35 《例題》2 直線 $3x+4y+5=0$，$ax+(1-a)y+2a=0$ が平行になるときの定数 a の値を求めよ。
また，この 2 直線が垂直になるときの定数 a の値を求めよ。〔類 駒澤大〕

解答 $3x+4y+5=0$ …… ①，　$ax+(1-a)y+2a=0$ …… ②　とする。

$1-a=0$ すなわち $a=1$ のとき，② は $x=-2$ となり，2 直線 ①，② は平行でも垂直でもないから　$a \neq 1$

よって，直線 ① の傾きは $-\dfrac{3}{4}$，　直線 ② の傾きは $\dfrac{a}{a-1}$

2 直線 ①，② が平行であるための条件は

$-\dfrac{3}{4}=\dfrac{a}{a-1}$　これを解いて　$a=\dfrac{3}{7}$　答　← 平行 $\Longleftrightarrow$ 傾きが一致

2 直線 ①，② が垂直であるための条件は

$-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{a}{a-1}=-1$　これを解いて　$a=4$　答　← 垂直 $\Longleftrightarrow$ 傾きの積が -1

別解 (2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ の平行・垂直条件

平行 $\Longleftrightarrow$ $a_1b_2-a_2b_1=0$　　垂直 $\Longleftrightarrow$ $a_1a_2+b_1b_2=0$

を利用する。)　← 一致も平行に含めている。

2 直線が平行であるための条件は　$3\cdot(1-a)-4\cdot a=0$　よって　$a=\dfrac{3}{7}$　答

2 直線が垂直であるための条件は　$3\cdot a+4\cdot(1-a)=0$　よって　$a=4$　答

類題　直線 $(a-1)x-4y+2=0$ と直線 $x+(a-5)y+3=0$ は，$a=$ ア［　　］のとき平行となり，
$a=$ イ［　　］のとき垂直に交わる。〔類 名城大〕

（　月　日）

得点
/50

３６　円の接線　　数学Ⅱ

★
36 《**例題**》(1)　円 $x^2+y^2=5$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ。〔麗澤大〕

(2)　点 $(6,\ 2)$ から円 $x^2+y^2=4$ に引いた接線の方程式を求めよ。〔神奈川大〕

解答 (1)　求める接線の方程式は　$1\cdot x+2y=5$　すなわち　$x+2y=5$　答

(2)　接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，P は円上にあるから　$a^2+b^2=4$　…… ①

また，点 P における接線の方程式は　$ax+by=4$

この直線が点 $(6,\ 2)$ を通るから　$6a+2b=4$

よって　$b=-3a+2$　…… ②

② を ① に代入すると　$a^2+(-3a+2)^2=4$

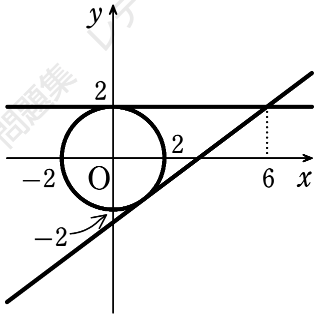
整理すると　$5a^2-6a=0$

すなわち　$a(5a-6)=0$　ゆえに　$a=0,\ a=\dfrac{6}{5}$

② から　$a=0$ のとき $b=2$，　$a=\dfrac{6}{5}$ のとき $b=-\dfrac{8}{5}$

したがって，求める接線の方程式は　$0\cdot x+2y=4,\ \dfrac{6}{5}x-\dfrac{8}{5}y=4$

すなわち　$y=2,\ 3x-4y=10$　答



類 **題** (1)　円 $x^2+y^2=4$ 上の点 $(\sqrt{3},\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。(10 点)〔類 明治学院大〕

(2)　点 $(15,\ 5)$ から円 $x^2+y^2=25$ に引いた接線の方程式を求めよ。(40 点)〔類 神奈川工科大〕

（　月　日）

得　点
／50

３７　軌　跡　　数学Ⅱ

★
37 《**例題**》2 点 A$(0,\ 2)$，B$(0,\ -3)$ からの距離の比が $2:3$ である点 P の軌跡を求めよ。〔高崎経大〕

解答 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

AP : BP $=2:3$ より，$3\text{AP}=2\text{BP}$ であるから　$9\text{AP}^2=4\text{BP}^2$

$\text{AP}^2=x^2+(y-2)^2$，$\text{BP}^2=x^2+(y+3)^2$

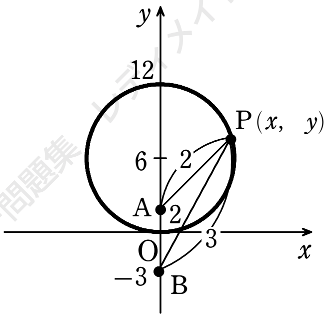
を代入して　$9\{x^2+(y-2)^2\}=4\{x^2+(y+3)^2\}$

よって　$9x^2+9y^2-36y+36=4x^2+4y^2+24y+36$

整理して　$x^2+y^2-12y=0$

変形すると　$x^2+(y^2-12y+36)-36=0$

したがって　$x^2+(y-6)^2=6^2$　……①



よって，点 P は円 ① 上にある。

逆に，円 ① 上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，点 $(0,\ 6)$ を中心とする半径 6 の円である。 答

類 **題**　2 点 A$(-2\sqrt{3},\ -2)$，B$(\sqrt{3},\ 1)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めよ。

〔倉敷芸科大〕

３８　領　域　　数学Ⅱ

★
38 《**例題**》2 つの不等式 $2x+y \geqq 1$，$x^2+y^2 \leqq 4$ を同時に満たす領域を図示せよ。　〔類 龍谷大〕

解答　$2x+y \geqq 1$ を変形すると　$y \geqq -2x+1$

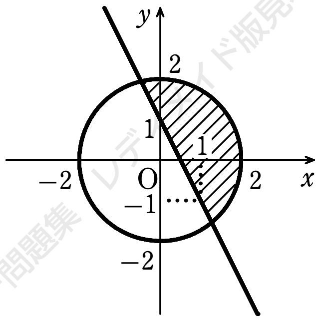
この不等式の表す領域は

直線 $y=-2x+1$ およびその上側

また，$x^2+y^2 \leqq 4$ の表す領域は

円 $x^2+y^2=4$ およびその内部

求める領域は，これらの共通部分であるから，右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線を含む。　答



類題　次の不等式の表す領域を求めよ。(25 点×2)

(1) $\begin{cases} 3x+y+4 \leqq 0 \\ x^2+y^2+2x \leqq 3 \end{cases}$

(2) $9 < x^2+y^2 < 25$

(月 日)

得 点
/50

３９　三角関数を含む方程式・不等式　数学Ⅱ

★
39 《例題》 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 3 = 0$　　(2) $\sin 2\theta = \cos\theta$

(3) $\cos 2\theta \leqq -\sin\theta$

解答 (1) 左辺を因数分解して　$(\cos\theta - \sqrt{3})(2\cos\theta + \sqrt{3}) = 0$

$\cos\theta - \sqrt{3} \neq 0$ であるから　$2\cos\theta + \sqrt{3} = 0$　すなわち　$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

これを解いて　$\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi$ 答

(2) $\sin 2\theta = \cos\theta$ から　$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$

左辺を変形すると　$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$　よって　$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

ゆえに　$\cos\theta = 0$ または $\sin\theta = \frac{1}{2}$　これを解いて　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$ 答

(3) $\cos 2\theta \leqq -\sin\theta$ から　$\cos 2\theta + \sin\theta \leqq 0$

左辺を変形すると　$(1 - 2\sin^2\theta) + \sin\theta \leqq 0$

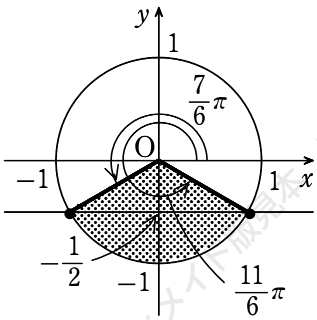
すなわち　$2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 \geqq 0$

よって　$(\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 1) \geqq 0$

$\sin\theta - 1 \leqq 0$ であるから　$2\sin\theta + 1 \leqq 0$

すなわち　$\sin\theta \leqq -\frac{1}{2}$

これを解いて　$\frac{7}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi$ 答



類 **題**　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$ (15点)　　(2) $\sin 2\theta = -\sqrt{3}\sin\theta$ (15点)

(3) $\cos 2\theta > \cos\theta$ (20点)

４０　加法定理　数学Ⅱ

★

40 《例題》 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とする。$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{5}{6}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(2)　$\cos(\alpha+\beta)$　　［類 南九州大］

解答　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ であるから　$\sin\alpha>0$，$\sin\beta>0$

よって　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　$\leftarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$　　$\leftarrow \sin^2\beta+\cos^2\beta=1$

(1)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}=\frac{10\sqrt{2}-\sqrt{11}}{18}$$ 答

(2)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}=\frac{5-2\sqrt{22}}{18}$$ 答

類題　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$ とする。$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$　(25点)　　(2)　$\cos(\alpha-\beta)$　(25点)　　［類 青山学院大］

（　月　日）

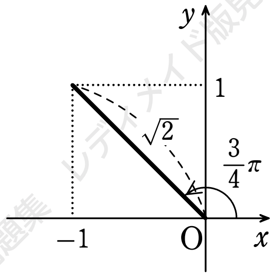
得点
/50

４１　三角関数の最大・最小　数学Ⅱ

★
41 《例題》$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y=-\sin\theta+\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

解答 $-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$ であるから

$$y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$$



$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\frac{3}{4}\pi \leqq \theta+\frac{3}{4}\pi < \frac{11}{4}\pi$ であり

$$-1 \leqq \sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right) \leqq 1$$

よって　$-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}$

また，$\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)=1$ のとき，$\theta+\frac{3}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi$ から　$\theta=\frac{7}{4}\pi$

$\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)=-1$ のとき，$\theta+\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$ から　$\theta=\frac{3}{4}\pi$

したがって　$\theta=\frac{7}{4}\pi$ で最大値 $\sqrt{2}$，$\theta=\frac{3}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$　答

類題　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。　〔神奈川大〕

（　月　日）

得　点
／50

４２　指数・対数の計算　　数学Ⅱ

★ **42** 《**例題**》次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt[4]{5}\div\sqrt[3]{5^2}$　　(2) $9^{\frac{1}{6}}\div27^{\frac{2}{9}}\times3$

(3) $\log_3 18+2\log_3 2-\log_3 8$　〔東京電機大〕　　(4) $(\log_3 2)(\log_8 9)$　〔明星大〕

解答 (1) $\sqrt{5}\times\sqrt[4]{5}\div\sqrt[3]{5^2}=5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{4}}\div5^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}=5^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{5}$ 答

(2) $9^{\frac{1}{6}}\div27^{\frac{2}{9}}\times3=(3^2)^{\frac{1}{6}}\div(3^3)^{\frac{2}{9}}\times3=3^{\frac{1}{3}}\div3^{\frac{2}{3}}\times3=3^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+1}=3^{\frac{2}{3}}$ 答

(3) $\log_3 18+2\log_3 2-\log_3 8=\log_3 18+\log_3 2^2-\log_3 8$　　$\leftarrow k\log_a M=\log_a M^k$

$=\log_3\dfrac{18\cdot2^2}{8}=\log_3 9=\log_3 3^2=2$ 答

(4) $(\log_3 2)(\log_8 9)=\log_3 2\cdot\dfrac{\log_3 9}{\log_3 8}=\log_3 2\cdot\dfrac{\log_3 3^2}{\log_3 2^3}$　　← 底を 3 にそろえる。

$=\log_3 2\cdot\dfrac{2}{3\log_3 2}=\dfrac{2}{3}$ 答

類 **題**　次の式を簡単にせよ。((1)(2) 各 10 点　(3)(4) 各 15 点)

(1) $\sqrt[3]{2}\times2^2\div\sqrt{2^3}$　〔駿河台大〕　　(2) $8^{\frac{5}{4}}\div16^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{5}{2}}$　〔福井工大〕

(3) $\log_3 54+\log_3 6-2\log_3 2$　〔武蔵大〕　　(4) $(\log_2 3)(\log_{81} 32)$　〔城西大〕

得　点
／50

４３　指数・対数の方程式・不等式　数学Ⅱ

★43 《**例題**》次の方程式，不等式を解け。

(1) $8^{-x-2}=4^{x-2}$ 〔神奈川大〕　(2) $5^{x+2}>\dfrac{1}{125}$ 〔福井工大〕

(3) $\log_2 x+\log_2(x-2)=3$ 〔湘南工科大〕　(4) $-1\leqq\log_{\frac{1}{3}}x$ 〔青山学院大〕

解答 (1)　方程式を変形すると　$(2^3)^{-x-2}=(2^2)^{x-2}$　よって　$2^{-3x-6}=2^{2x-4}$

したがって　$-3x-6=2x-4$　これを解いて　$x=-\dfrac{2}{5}$ 答

(2)　不等式を変形すると　$5^{x+2}>5^{-3}$

底 5 は 1 より大きいから　$x+2>-3$　これを解いて　$x>-5$ 答

(3)　真数は正であるから　$x>0$，$x-2>0$　すなわち　$x>2$ ……①

方程式を変形すると　$\log_2 x(x-2)=3$　よって　$x(x-2)=2^3$

整理して　$x^2-2x-8=0$　すなわち　$(x+2)(x-4)=0$

① から，解は　$x=4$ 答

(4)　真数は正であるから　$x>0$ ……①

$-1=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{3}}3$ であるから，$-1\leqq\log_{\frac{1}{3}}x$ より　$\log_{\frac{1}{3}}3\leqq\log_{\frac{1}{3}}x$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x\leqq3$ ……②　①，② から，解は　$0<x\leqq3$ 答

類題 次の方程式，不等式を解け。((1)(2) 各 10 点　(3)(4) 各 15 点)

(1) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^x=16^{x+1}$ 〔成蹊大〕　(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}>\dfrac{1}{16}$ 〔城西大〕

(3) $\log_3(x-2)+\log_3(2x-7)=2$ 〔同志社大〕　(4) $\log_2(x+2)<2$ 〔熊本学園大〕

得　点
／50

４４　指数・対数関数の最大・最小　　数学Ⅱ

★ **44** 《例題》(1)　関数 $y=4^{x+1}-2^{x+1}-6$ の最小値を求めよ。〔類 北里大〕

(2)　関数 $y=\log_2 x+\log_2(1-x)+2$ について，次の問いに答えよ。〔類 神奈川大〕

（ア）　定義域を求めよ。　　（イ）　y の最大値を求めよ。

解答　(1)　$2^x=t$ とおくと　$t>0$

関数 y は　$y=4t^2-2t-6=4\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{25}{4}$

よって，y は $t=\dfrac{1}{4}$ すなわち $x=-2$ で最小値 $-\dfrac{25}{4}$ をとる。 答

(2)　（ア）　真数は正であるから　$x>0$，$1-x>0$

よって，定義域は　$0<x<1$

（イ）　$y=\log_2 x+\log_2(1-x)+\log_2 4=\log_2 4x(1-x)$

$=\log_2\left\{-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+1\right\}$

$0<x<1$ であるから，y は $x=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\log_2 1=0$ をとる。 答

類題　(1)　関数 $y=3^{2x-1}-2\cdot3^{x+1}$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の最大値，最小値を求めよ。(25 点)　〔類 大阪産大〕

(2)　関数 $y=\log_2(x+7)+\log_2(1-x)$ について，次の問いに答えよ。

（ア）　定義域を求めよ。(10 点)　　（イ）　y の最大値を求めよ。(15 点)　〔類 足利工大〕

（　月　日）

得　点
／50

４５　接線の方程式　数学Ⅱ

★45 《例題》次の関数のグラフ上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=3x^2-5x+1$，A$(2,\ 3)$　　(2)　$y=x^3-2x^2+x+5$，A$(-1,\ 1)$

解答　(1)　$f(x)=3x^2-5x+1$ とする。

接線の傾きは　$f'(2)$

$f'(x)=6x-5$ であるから　$f'(2)=6\cdot2-5=7$

接線は，点 A$(2,\ 3)$ を通り傾きが 7 の直線である。

よって，その方程式は　$y-3=7(x-2)$　すなわち　$y=7x-11$　答

(2)　$f(x)=x^3-2x^2+x+5$ とする。

接線の傾きは　$f'(-1)$

$f'(x)=3x^2-4x+1$ であるから　$f'(-1)=3\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)+1=8$

接線は，点 A$(-1,\ 1)$ を通り傾きが 8 の直線である。

よって，その方程式は　$y-1=8\{x-(-1)\}$　すなわち　$y=8x+9$　答

類題　次の関数のグラフ上の点 A における接線の方程式を求めよ。((1) 20 点　(2) 30 点)

(1)　$y=-2x^2+4x+3$，A$(3,\ -3)$　　(2)　$y=3x^3+5x^2-x+7$，A$(-2,\ 5)$

(月 日) | 得点 /50

46 関数の増減とグラフ　数学Ⅱ

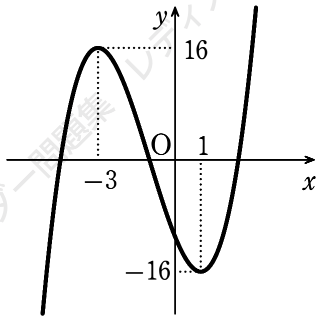
★ **46** 《例題》関数 $y=x^3+3x^2-9x-11$ の極値を求め，そのグラフをかけ。

解答 $y'=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-3,\ 1$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 16	$\searrow$	極小 -16	$\nearrow$



よって，y は $x=-3$ で極大値 16,

$x=1$ で極小値 -16　をとる。

また，グラフは右の図のようになる。 答

類題 関数 $y=2x^3-3x^2-12x$ の極値を求め，そのグラフをかけ。 ［類 東京水産大］

(月 日) | 得 点 | /50

４７ 関数の最大・最小 数学Ⅱ

★
47 《**例題**》関数 $y=2x^3-9x^2+12x+3$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の最大値，最小値を求めよ。 〔類 慶応大〕

解答 $y'=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$y'=0$ とすると $x=1,\ 2$

$0\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	3	$\nearrow$	8	$\searrow$	7	$\nearrow$	12

← 最大値は極大値 8 と端の値 12 を比較，最小値は極小値 7 と端の値 3 を比較して決定。

よって，$x=3$ で最大値 12，$x=0$ で最小値 3 をとる。 答

類題 次の関数の最大値，最小値を求めよ。((1) 20 点 (2) 30 点)

(1) $y=x^3-9x^2+15x$ $(0\leqq x\leqq 3)$ 〔類 京都産大〕

(2) $y=2x^3-15x^2+36x$ $(1\leqq x\leqq 4)$ 〔類 大阪産大〕

（　月　日）

得点
/50

４８　定積分の計算　数学Ⅱ

★
48 《例題》次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+5x+2)dx$　〔中央大〕

(2) $\displaystyle\int_0^4 |x^2+2x-8|dx$　〔駒澤大〕

解答 (1) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+5x+2)dx=\left[x^3+\frac{5}{2}x^2+2x\right]_0^1=\left(1^3+\frac{5}{2}\cdot 1^2+2\cdot 1\right)-0=\frac{11}{2}$ 答

(2) $x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

$0\leqq x\leqq 2$ のとき

$|x^2+2x-8|=-(x^2+2x-8)=-x^2-2x+8$

← 場合分けして絶対値記号をはずす。

$2\leqq x\leqq 4$ のとき　$|x^2+2x-8|=x^2+2x-8$

よって　$\displaystyle\int_0^4 |x^2+2x-8|dx=\int_0^2 (-x^2-2x+8)dx+\int_2^4 (x^2+2x-8)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+8x\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-8x\right]_2^4=24$ 答

類題　次の定積分を求めよ。((1) 20 点　(2) 30 点)

(1) $\displaystyle\int_{-2}^3 (x^2-3x-2)dx$　〔青山学院大〕

(2) $\displaystyle\int_{-2}^5 |x^2-9|dx$　〔立教大〕

４９　面　積　　数学Ⅱ

★
49 《例題》(1)　放物線 $y=-x^2+4x-3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。〔獨協大〕

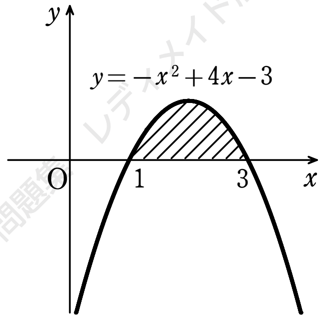
(2)　2 つの放物線 $y=x^2+4x+1$ と $y=-x^2+2x+5$ で囲まれた部分の面積を求めよ。〔文京学院大〕

解答　(1)　この放物線と x 軸の交点の x 座標は，$-x^2+4x-3=0$

を解いて　$x=1,\ 3$

$1 \leqq x \leqq 3$ では $y \geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$ 答



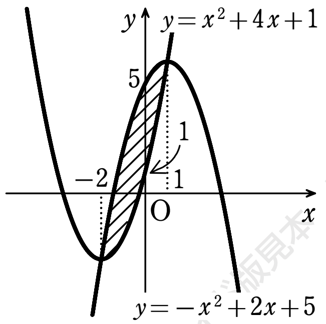
(2)　方程式 $x^2+4x+1=-x^2+2x+5$ を解くと　$x=-2,\ 1$

よって，求める面積 S は，図から

$$S=\int_{-2}^1\{(-x^2+2x+5)-(x^2+4x+1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^1(-2x^2-2x+4)dx=-2\int_{-2}^1(x^2+x-2)dx$$

$$=-2\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^1=9$$ 答



参考　$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用すると，例えば

(1) は $\displaystyle S=-\int_1^3(x-1)(x-3)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(3-1)^3\right\}=\frac{4}{3}$ と

計算できる。

類題　(1)　放物線 $y=x^2-x-2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。(20 点)〔昭和女子大〕

(2)　2 つの放物線 $y=-x^2+2x$ と $y=x^2-4$ で囲まれた部分の面積を求めよ。(30 点)〔南九州大〕

（　月　日）

得　点
／50

５０　等差数列　　数学Ｂ

★

50 《**例題**》第 5 項が 71 で，第 11 項が 47 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 一般項を求めよ。　(2) 59 は第何項か。

(3) 初めて負になるのは第何項か。　(4) 初項から第 12 項までの和を求めよ。

解答 (1) 初項を a，公差を d とおくと　$a_n=a+(n-1)d$

第 5 項が 71，第 11 項が 47 であるから　$71=a+(5-1)d$，$47=a+(11-1)d$

すなわち　$a+4d=71$，　$a+10d=47$

これを解くと　$a=87$，$d=-4$

よって，一般項は　$a_n=87+(n-1)\cdot(-4)=-4n+91$　答

(2) $a_n=59$ から　$-4n+91=59$　これを解くと　$n=8$

よって，59 は第 8 項である。　答

(3) $a_n<0$ から　$-4n+91<0$　これを解くと　$n>22.75$

よって，初めて負になるのは，第 23 項である。　答

(4) 初項から第 12 項までの和は　$\dfrac{12}{2}\{2\cdot 87+(12-1)\cdot(-4)\}=780$　答

類 **題**　第 4 項が 4 で，第 8 項が 16 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。（(1) 20 点　(2)(3)(4) 各 10 点）

(1) 一般項を求めよ。　(2) 55 は第何項か。

(3) 初めて 100 より大きくなるのは第何項か。　(4) 初項から第 8 項までの和を求めよ。

得　点
/50

５１　等比数列　　数学Ｂ

★
51 《**例題**》第 5 項が 48 で，第 7 項が 192 である等比数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 初項 a と公比 r を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の公比が正のとき，初項から第 6 項までの和を求めよ。

解答 (1) 第 5 項が 48，第 7 項が 192 であるから　$ar^{5-1}=48$，　$ar^{7-1}=192$

すなわち　$ar^4=48$ ……①，　$ar^6=192$ ……②

① を ② に代入すると　$48r^2=192$

よって　$r^2=4$　　したがって　$r=\pm 2$

これと ① から　$a\cdot 16=48$　　よって　$a=3$

以上から　$a=3$，$r=2$　または　$a=3$，$r=-2$　答

(2) 初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 6 項までの和であるから

$$\frac{3(2^6-1)}{2-1}=3(64-1)=189$$ 答

類題 第 2 項が $-\dfrac{1}{6}$ で，第 4 項が $-\dfrac{1}{54}$ である等比数列 $\{a_n\}$ がある。　〔類 札幌大〕

(1) 初項 a と公比 r を求めよ。(35 点)

(2) $\{a_n\}$ の公比が負のとき，初項から第 5 項までの和を求めよ。(15 点)

５２　階差数列　数学Ｂ

★
52 《**例題**》数列 $\{a_n\}$：2，3，8，17，30，…… の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1) 階差数列の一般項 b_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。〔類 大阪樟蔭女子大〕

解答 (1) 階差数列 $\{b_n\}$ は　1，5，9，13，……

これは初項 1，公差 4 の等差数列であるから　$b_n=1+(n-1)\cdot 4=4n-3$ 答

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)=2+4\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}3$$
$$=2+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)\cdot 3$$

よって　$a_n=2n^2-5n+5$　……①

初項は $a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n^2-5n+5$ 答

類 題 数列 5，1，0，2，7，15，26，40，…… の一般項を a_n とする。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。(15 点)

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(35 点)〔広島修道大〕

	得　点
５３　数列の和と一般項　　数学Ｂ	／50

★
53 《**例題**》初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=4n^2-5n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$n=1$ のとき　$a_1=S_1=4\cdot1^2-5\cdot1=-1$ ……①

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(4n^2-5n)-\{4(n-1)^2-5(n-1)\}$

$=(4n^2-5n)-(4n^2-13n+9)$

よって　$a_n=8n-9$ ……②

② で $n=1$ とすると，① に一致するから，② は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=8n-9$　答

類題　初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(25 点×2)

(1)　$S_n=n^2-2n+3$　〔創価大〕

(2)　$S_n=n^3-n$　〔八戸工大〕

得　点
／50

５４　数学的帰納法　数学Ｂ

★
54 《**例題**》自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ について，次の等式が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。〔多摩大〕

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+n(n+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$

解答　この等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　(左辺)$=3$,　(右辺)$=\dfrac{1}{6}\cdot1\cdot(1+1)(2\cdot1+7)=3$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+k(k+2)=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+7)\quad\cdots\cdots②$$

と仮定する。$n=k+1$ のとき，① の左辺について考えると，② により

$$\begin{aligned}&1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+k(k+2)+(k+1)(k+3)\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+7)+(k+1)(k+3)=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+7)+6(k+3)\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+13k+18)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+9)\end{aligned}$$

すなわち　$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+(k+1)\{(k+1)+2\}=\dfrac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+7\}$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。　終

類 **題**　次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。〔東北学院大〕

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots\cdots+n\cdot1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

５５　ベクトルの演算と成分　数学Ｃ	得点
	/50

★
55 《例題》(1)　等式 $3(2\vec{a}-\vec{x})=5\vec{a}-6\vec{b}$ を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(4,\ -3)$ に対して $\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$，$2\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$ を満たすベクトル $\vec{x}$，$\vec{y}$ の成分を求めよ。　[(2) 高知工科大]

解答 (1)　$3(2\vec{a}-\vec{x})=5\vec{a}-6\vec{b}$ から　$6\vec{a}-3\vec{x}=5\vec{a}-6\vec{b}$

よって　$3\vec{x}=\vec{a}+6\vec{b}$　　ゆえに　$\vec{x}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}$　答

← x の方程式 $3(2a-x)=5a-6b$ を解く要領で。

(2)　$\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$ ……①，$2\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$ ……②　とする。

← x，y の連立方程式 $x+2y=a$，$2x-y=b$ を解く要領で。

①＋②×2 から　$5\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$

よって　$\vec{x}=\dfrac{1}{5}(\vec{a}+2\vec{b})=\dfrac{1}{5}\{(2,\ 1)+2(4,\ -3)\}$

$=(2,\ -1)$　答

①×2－② から　$5\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$

よって　$\vec{y}=\dfrac{1}{5}(2\vec{a}-\vec{b})=\dfrac{1}{5}\{2(2,\ 1)-(4,\ -3)\}=(0,\ 1)$　答

類題 (1)　等式 $4\vec{x}+\vec{a}-3\vec{b}=2(\vec{x}+\vec{b})$ を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。(20 点)

(2)　$\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 3)$ とする。$\begin{cases}\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}\\ \vec{x}-3\vec{y}=\vec{b}\end{cases}$ を満たす $\vec{x}$，$\vec{y}$ を求めよ。(30 点)　[(2) 小樽商科大]

得　点
/50

56　ベクトルの分解　数学C

★
56 《例題》$\vec{a}=(3,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(9,\ 2)$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。〔倉敷芸科大〕

解答　$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s(3,\ 4)+t(-1,\ 2)$$
$$=(3s-t,\ 4s+2t)$$

よって　$(9,\ 2)=(3s-t,\ 4s+2t)$　← 対応する成分が等しい。

したがって　$3s-t=9$　…… ①，　$4s+2t=2$　…… ②

①×2+② から　$10s=20$　よって　$s=2$　…… ③

③ を ① に代入すると　$6-t=9$　ゆえに　$t=-3$

したがって　$\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$　答

類題 (1)　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 1)$ のとき，$\vec{c}=(-1,\ 3)$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。(25点)　〔東和大〕

(2)　$\vec{a}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$ のとき，$\vec{c}=(3,\ -4)$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。(25点)

（　月　日）

得　点
／50

５７　ベクトルの内積　　数学Ｃ

★
57 《**例題**》2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ を満たす。次のものを求めよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ　　〔類 駒澤大〕

解答 (1)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$　　← $|\vec{p}|^2=\vec{p}\cdot\vec{p}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$　　← $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ と同じように計算。

すなわち　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ を代入すると　$7=1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$　答

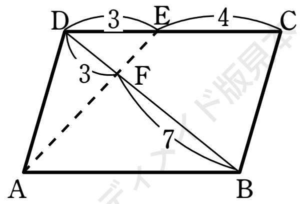
(2)　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\dfrac{3}{2}\div(1\times 3)=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$　答

類題　2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{37}$，$|\vec{b}|=2$ とする。このとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。　〔類 立教大〕

58　ベクトルの図形への応用　数学C

★
58 《**例題**》平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 4 : 3 に内分する点を E，対角線 BD を 7 : 3 に内分する点を F とする。3 点 A，F，E は一直線上にあることを示せ。



解答　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

BF : FD＝7 : 3 であるから

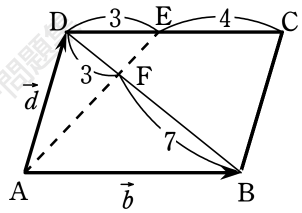
$$\overrightarrow{AF}=\frac{3\vec{b}+7\vec{d}}{7+3}=\frac{3\vec{b}+7\vec{d}}{10}$$

CE : ED＝4 : 3 であるから

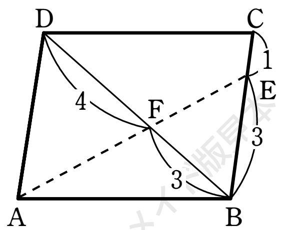
$$\overrightarrow{AE}=\frac{3\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AD}}{4+3}=\frac{3(\vec{b}+\vec{d})+4\vec{d}}{7}=\frac{3\vec{b}+7\vec{d}}{7}$$

よって　$\overrightarrow{AF}=\frac{7}{10}\overrightarrow{AE}$

したがって，3 点 A，F，E は一直線上にある。 終



類 題　平行四辺形 ABCD において，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を E，対角線 BD を 3 : 4 に内分する点を F とする。3 点 A，F，E は一直線上にあることを示せ。



（　月　日）

得点
/50

59　空間における点の座標　数学C

★

59 《例題》3点A(1, 2, 3)，B(−3, 2, 4)，C(2, 4, 1)が定める平面上に点D(1, y, 10)があるとき，yの値を求めよ。

解答　3点A，B，Cが定める平面上に点Dがあるとき

$$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

となる実数s，tがある。

ここで，$\overrightarrow{AB}=(-4,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\ 2,\ -2)$，$\overrightarrow{AD}=(0,\ y-2,\ 7)$であるから

$$(0,\ y-2,\ 7)=s(-4,\ 0,\ 1)+t(1,\ 2,\ -2)$$
$$=(-4s+t,\ 2t,\ s-2t)$$

したがって　$0=-4s+t$ ……①，　$y-2=2t$ ……②，　$7=s-2t$ ……③

①，③を解いて　$s=-1$，$t=-4$

よって，②から　$y=2\cdot(-4)+2=-6$　答

類題　3点O(0, 0, 0)，A(0, 2, 1)，B(1, −1, 3)が定める平面上に点C(2, 4, z)があるとき，zの値を求めよ。

得　点
／50

６０　空間ベクトルの大きさの最小値　数学Ｃ

★
60 《例題》 $\vec{a}=(1,\ -3,\ -2)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ 0)$ とする。$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) について，$|\vec{x}|$ の最小値を求めよ。また，そのときの $\vec{x}$ を成分で表せ。

解答　$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ -3,\ -2)+t(1,\ 2,\ 0)=(1+t,\ -3+2t,\ -2)$

よって　$|\vec{x}|^2=(1+t)^2+(-3+2t)^2+(-2)^2$　　← $|\vec{p}|$ は $|\vec{p}|^2$ として扱う。

$=5t^2-10t+14$

$=5(t-1)^2+9$　　← 平方完成

したがって，$|\vec{x}|^2$ は $t=1$ のとき最小となる。

$|\vec{x}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{x}|$ も最小となる。

その最小値は　$\sqrt{9}=3$　答

また，$t=1$ のとき　$\vec{x}=(2,\ -1,\ -2)$　答

類 題　$\vec{a}=(0,\ -2,\ 4)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ -1)$ のとき，$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) について，$|\vec{x}|$ の最小値を求めよ。また，そのときの $\vec{x}$ を成分で表せ。