内容見本用 目次

実際の書籍には，これと同内容のものが表紙裏に入ります。

（　月　日）

得　点
／50

1　二項定理　　数学Ⅱ

★★
1 《例題》 (1) $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ。〔昭和女子大〕

(2) $(1+x+x^2)^{10}$ の展開式における x^4 の係数を求めよ。〔共立薬大〕

解答 (1) $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$ の展開式における一般項は　${}_6C_r(x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r={}_6C_r(-2)^r\cdot\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}$

$12-2r=r$ とすると　$r=4$

よって，求める定数項は　${}_6C_4(-2)^4={}_6C_2\cdot16=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot16=240$ 答

(2) $(1+x+x^2)^{10}$ の展開式における一般項は

$$\frac{10!}{p!\,q!\,r!}\cdot1^px^q(x^2)^r=\frac{10!}{p!\,q!\,r!}x^{q+2r}$$　ただし　$p+q+r=10$

$q+2r=4$ とすると，p，q，r は 0 以上 10 以下の整数であるから

$(p,\ q,\ r)=(8,\ 0,\ 2),\ (7,\ 2,\ 1),\ (6,\ 4,\ 0)$

よって，x^4 の係数は　$\dfrac{10!}{8!\,0!\,2!}+\dfrac{10!}{7!\,2!\,1!}+\dfrac{10!}{6!\,4!\,0!}=45+360+210=615$ 答

類 題 (1) $\left(x-\dfrac{5}{x^2}\right)^6$ の展開式における定数項を求めよ。(20 点)〔琉球大〕

(2) $(x^2-2x+2)^4$ の展開式における x^5 の係数を求めよ。(30 点)〔埼玉工大〕

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

得　点
／50

2　多項式の割り算，恒等式　数学Ⅱ

★★
2 **《例題》** 多項式 x^3+ax^2+2x+b が x^2-x+1 で割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ。〔摂南大〕

解答 右の割り算から，x^3+ax^2+2x+b を x^2-x+1 で割ったときの余りは

$$(a+2)x-a+b-1$$

$$
\begin{array}{r l}
 & x+(a+1) \\ \cline{2-2}
x^2-x+1 \big) & x^3+ax^2+\phantom{(a+1)x+{}}2x+b \\
 & x^3-x^2+\phantom{(a+1)x+{}}x \\ \cline{2-2}
 & (a+1)x^2+x+b \\
 & (a+1)x^2-(a+1)x+a+1 \\ \cline{2-2}
 & \phantom{(a+1)x^2-{}}(a+2)x-a+b-1
\end{array}
$$

余りは0であるから，恒等式

$(a+2)x-a+b-1=0$ が成り立つ。

よって　$a+2=0$，$-a+b-1=0$

これを解いて　$a=-2$，$b=-1$　答

別解 x^3+ax^2+2x+b が x^2-x+1 で割り切れるとき，商は $x+c$ とおけて，等式

$$x^3+ax^2+2x+b=(x^2-x+1)(x+c)$$

が成り立つ。

右辺を展開して整理すると　$x^3+ax^2+2x+b=x^3+(c-1)x^2+(-c+1)x+c$

これは x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$$a=c-1 \quad \cdots\cdots ①,\qquad 2=-c+1 \quad \cdots\cdots ②,\qquad b=c \quad \cdots\cdots ③$$

② から　$c=-1$　これを ①，③ に代入して　$a=-2$，$b=-1$　答

類 題 多項式 x^3-x^2+ax+b が多項式 x^2+x+1 で割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ。

〔京都産大〕

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

(月 日) | 得 点 | $/50$

3 等式の証明　数学Ⅱ

★★
3 《例題》 a, b, c を実数とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $(a^2-1)(b^2-1)=(ab+1)^2-(a+b)^2$

(2) $a+b+c=0$ のとき $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$

解答 (1) (左辺)$=a^2b^2-a^2-b^2+1$

(右辺)$=(a^2b^2+2ab+1)-(a^2+2ab+b^2)=a^2b^2-a^2-b^2+1$

よって $(a^2-1)(b^2-1)=(ab+1)^2-(a+b)^2$ 終

(2) $a+b+c=0$ より $c=-a-b$

よって (左辺)$=(a+b)\{b+(-a-b)\}\{(-a-b)+a\}+ab(-a-b)$

$=(a+b)(-a)(-b)+ab(-a-b)=a^2b+ab^2-a^2b-ab^2=0$

したがって $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$ 終

別解 $a+b+c=0$ より $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$

よって $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(-c)(-a)(-b)+abc$

$=-abc+abc=0$ 終

類 題 a, b, c, d を実数とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。((1) 20 点 (2) 30 点)

(1) $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$

(2) $a+b+c=0$ のとき $ab(a+b)^2+bc(b+c)^2+ca(c+a)^2=0$

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

得　点
／50

4　比例式の値　　数学Ⅱ

★★
4 《例題》 $\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{6}=\dfrac{z+x}{7}\fallingdotseq 0$ のとき $x:y:z=$ ア$\boxed{}$，$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=$ イ$\boxed{}$ である。

〔愛知学院大〕

解答 $\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{6}=\dfrac{z+x}{7}=k$ とおくと，$k\fallingdotseq 0$ で　　← 比例式は $=k$ とおく。

$x+y=5k$ ……①，　$y+z=6k$ ……②，　$z+x=7k$ ……③

①+②+③ から　$2(x+y+z)=18k$

よって　$x+y+z=9k$ ……④

④−① から　$z=4k$　　④−② から　$x=3k$　　④−③ から　$y=2k$

したがって　$x:y:z=3k:2k:4k=$ ア$3:2:4$　答

また　$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{3k\cdot 2k+2k\cdot 4k+4k\cdot 3k}{(3k)^2+(2k)^2+(4k)^2}=\dfrac{26k^2}{29k^2}=$ イ$\dfrac{26}{29}$　答

類題 $\dfrac{x+y}{8}=\dfrac{y+z}{7}=\dfrac{z+x}{9}\fallingdotseq 0$ のとき，x，y を z を用いて表せ。

このとき，$\dfrac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(x+y+z)^2}$ の値を求めよ。　〔類 広島工大〕

(　月　日)

得　点
／50

5　不等式の証明　　数学Ⅱ

★★

5 《**例題**》(1)　$x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $(3x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}\right)\geqq 12$ を証明せよ。　〔九州産大〕

(2)　不等式 $3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$ を証明せよ。　〔岐阜聖徳学園大〕

解答　(1)　$(3x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}\right)=3+\dfrac{9x}{y}+\dfrac{y}{x}+3=\dfrac{9x}{y}+\dfrac{y}{x}+6$

$\dfrac{9x}{y}>0$，$\dfrac{y}{x}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{9x}{y}+\frac{y}{x}+6\geqq 2\sqrt{\frac{9x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+6=6+6=12$$

よって　$(3x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}\right)\geqq 12$　終

参考　等号が成り立つのは，$x>0$，$y>0$ かつ $\dfrac{9x}{y}=\dfrac{y}{x}$ すなわち $3x=y$ のときである。

(2)　$(a+b+c)^2=\{a+(b+c)\}^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

よって　$3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$

$=3a^2+3b^2+3c^2-a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca$

$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$

$=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqq 0$

したがって　$3(a^2+b^2+c^2)\geqq(a+b+c)^2$　終

参考　等号が成り立つのは，$a=b=c$ のときである。

類題 (1)　$x>0$，$y>0$ のとき，不等式 $(x+2y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)\geqq 9$ を証明せよ。(20点)

(2)　不等式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq(ac+bd)^2$ を証明せよ。(30点)

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

得　点
／50

６　２数を解とする２次方程式　数学Ⅱ

★★

6 《**例題**》2 次方程式 $x^2+3x-2=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，α^3，β^3 を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。 ［中部大］

解答　解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{3}{1}=-3$，　$\alpha\beta=\dfrac{-2}{1}=-2$

したがって　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-3)^3-3\cdot(-2)\cdot(-3)=-45$　← 2 数の和

$\alpha^3\cdot\beta^3=(\alpha\beta)^3=(-2)^3=-8$　← 2 数の積

よって，求める 2 次方程式の 1 つは　$x^2+45x-8=0$　答

類題　2 次方程式 $2x^2+3x+2=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の 2 数を解にもつ 2 次方程式を 1 つ作れ。((1)(2) 各 25 点)

(1)　α^2，β^2

(2)　$\dfrac{1}{\alpha^3}$，$\dfrac{1}{\beta^3}$

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

7　２次方程式の解と数の大小　数学Ⅱ

★★
7 《**例題**》2 次方程式 $x^2-2mx+m+6=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，かつ，その解が 2 つとも 1 より大きいとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

解答　2 次方程式の 2 つの解を α，β，判別式を D とする。

方程式が条件を満たすのは，次の ① ～ ③ が同時に成り立つときである。

$D>0$ ……①，　$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ ……②，　$(\alpha-1)(\beta-1)>0$ ……③

ここで　$\dfrac{D}{4}=(-m)^2-(m+6)=m^2-m-6=(m+2)(m-3)$

① より，$(m+2)(m-3)>0$ であるから　$m<-2$，$3<m$ ……④

②，③ より　$(\alpha+\beta)-2>0$，$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

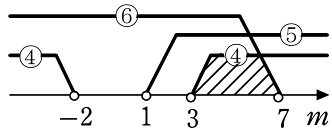
解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2m$，$\alpha\beta=m+6$

よって　$2m-2>0$，$(m+6)-2m+1>0$

したがって　$m>1$ ……⑤

$m<7$ ……⑥

④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて　$3<m<7$　答



類題　2 次方程式 $x^2+2(m-1)x+7-3m=0$ の解がすべて 2 より大きい実数であるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

（　月　日）

得　点
／50

8　余りの決定　　数学Ⅱ

★★
8 《**例題**》多項式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 7 であり，$x+1$ で割ると余りが 1 である。$P(x)$ を $(x-2)(x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。〔類 京都産大〕

解答　$P(x)$ を 2 次式 $(x-2)(x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b$$

多項式 $P(x)$ を 2 次式で割ったときの余りは，1 次式か定数。

この等式から　$P(2)=2a+b$，　$P(-1)=-a+b$

$P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 7 であるから　$P(2)=7$

$P(x)$ を $x+1$ で割ると余りが 1 であるから　$P(-1)=1$

よって　$2a+b=7$，　$-a+b=1$

これを解くと　$a=2$，$b=3$

したがって，求める余りは　$2x+3$　答

類 題　多項式 $P(x)$ を $x-3$ で割ると余りが 7 であり，$x+2$ で割ると余りが -3 である。$P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの余りを求めよ。〔関東学院大〕

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

（　月　日）

得　点
/50

9　高次方程式　　数学Ⅱ

★★

9 《**例題**》方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ の解の 1 つが $x=1+i$ であるとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。〔東京電機大〕

解答 $1+i$ がこの方程式の解であるから　$(1+i)^3-(1+i)^2+a(1+i)+b=0$

ここで　(左辺)$=1^3+3\cdot1^2\cdot i+3\cdot1\cdot i^2+i^3-(1^2+2\cdot1\cdot i+i^2)+a+ai+b$

$=1+3i-3-i-(1+2i-1)+a+ai+b=(a+b-2)+ai$

よって　$(a+b-2)+ai=0$

$a+b-2$，a は実数であるから　$a+b-2=0$，$a=0$

これを解くと　$a=0$，$b=2$

このとき，方程式は　$x^3-x^2+2=0$

$P(x)=x^3-x^2+2$ とすると

$P(-1)=(-1)^3-(-1)^2+2=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつから，方程式は

$(x+1)(x^2-2x+2)=0$

これを解くと　$x=-1$，$1\pm i$

以上から　$a=0$，$b=2$；他の解は -1，$1-i$　答

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x+2 \\
\hline
x+1 & x^3-x^2+2 \\
 & x^3+x^2 \\
\hline
 & -2x^2 \\
 & -2x^2-2x \\
\hline
 & 2x+2 \\
 & 2x+2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

類 **題** 方程式 $x^3+ax+b=0$ の解の 1 つが $x=1+\sqrt{2}\,i$ であるとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。〔摂南大〕

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

	得　点
１０　直線に関して対称な点　数学Ⅱ	／50

★★
10 《**例題**》直線 $3x-y+2=0$ に関して，点 A$(1,\ 2)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

解答　直線 $3x-y+2=0$ を ℓ とし，点 B の座標を $(p,\ q)$ とする。

直線 ℓ の傾きは 3 であり，直線 AB は ℓ に垂直であるから

$$3\cdot\frac{q-2}{p-1}=-1$$

よって　$p+3q=7$　……①

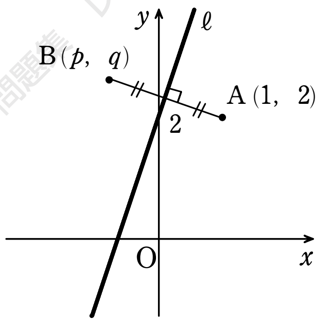
また，線分 AB の中点 $\left(\frac{p+1}{2},\ \frac{q+2}{2}\right)$ は ℓ 上にあるから

$$3\cdot\frac{p+1}{2}-\frac{q+2}{2}+2=0$$

ゆえに　$3p-q=-5$　……②

①，② を連立させて解くと　$p=-\frac{4}{5}$，$q=\frac{13}{5}$

したがって，点 B の座標は　$\left(-\frac{4}{5},\ \frac{13}{5}\right)$ 答



類 題　直線 ℓ：$2x-y+3=0$ に関して，点 C$(3,\ 12)$ と対称な点を P$(a,\ b)$ とする。a，b の値と，直線 OP の傾きを求めよ。(O は原点)　〔類 自治医大〕

１１　円の接線　数学Ⅱ

★★
$\boxed{11}$ 《例題》(1)　円 $x^2+y^2=16$ 上の点 $(3,\ \sqrt{7})$ における接線の方程式を求めよ。　〔類 昭和薬大〕

(2)　点 $(1,\ 2)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の方程式を求めよ。　〔類 酪農学園大〕

解答　(1)　求める接線の方程式は　$3x+\sqrt{7}y=16$　答

(2)　接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，P は円上にあるから　$a^2+b^2=1$　…… ①

また，点 P における接線の方程式は　$ax+by=1$

この直線が点 $(1,\ 2)$ を通るから　$a+2b=1$

よって　$a=-2b+1$　…… ②

② を ① に代入すると　$(-2b+1)^2+b^2=1$　整理すると　$5b^2-4b=0$

よって，$b(5b-4)=0$ より　$b=0,\ \dfrac{4}{5}$

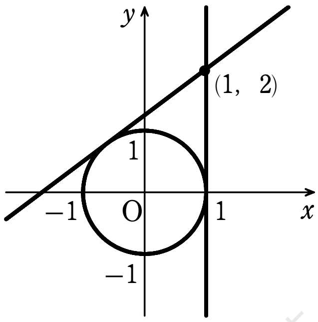
② から　$b=0$　のとき　$a=1$，

$b=\dfrac{4}{5}$ のとき　$a=-\dfrac{3}{5}$

したがって，求める接線の方程式は

$$1\cdot x+0\cdot y=1,\ -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=1$$

すなわち　$x=1,\ 3x-4y=-5$　答



類題 (1)　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(-4,\ -3)$ における接線の方程式を求めよ。(10 点)

(2)　点 $(-1,\ 3)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式を求めよ。(40 点)

〔(1) 類 神奈川工科大　(2) 類 明星大〕

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

12　軌　跡　　数学Ⅱ

★★
12 《**例題**》点 A$(-3, 0)$ とする。点 Q が円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くとき，線分 AQ を $1:2$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。 ［類　北海道情報大］

解答　点 P の座標を (x, y)，点 Q の座標を (s, t) とする。

点 Q は円 $x^2+y^2=1$ 上にあるから　$s^2+t^2=1$　……①

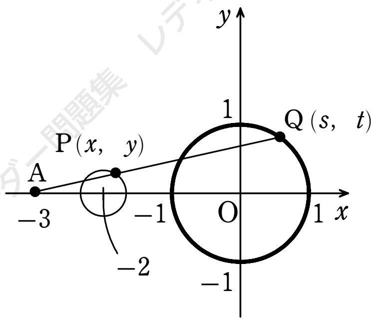
点 P は線分 AQ を $1:2$ に内分するから

$$x=\frac{2\cdot(-3)+1\cdot s}{1+2}=\frac{s-6}{3},\quad y=\frac{2\cdot 0+1\cdot t}{1+2}=\frac{t}{3}$$

ゆえに　$s=3x+6,\quad t=3y$

これを ① に代入すると　$(3x+6)^2+(3y)^2=1$

すなわち　$(x+2)^2+y^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$　……②



よって，点 P は円 ② 上にある。

逆に，円 ② 上のすべての点 P(x, y) は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，点 $(-2, 0)$ を中心とする半径 $\frac{1}{3}$ の円である。 答

類 **題**　点 A$(-2, 0)$ とする。点 Q が円 $(x-2)^2+y^2=5$ の周上を動くとき，線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ。 ［類　大阪学院大］

１３　領域と最大・最小　数学Ⅱ

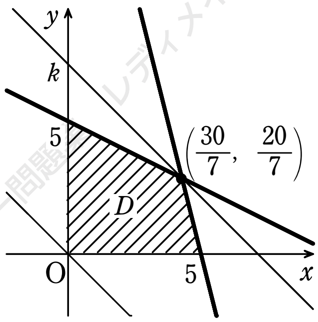
／50

★★
13 《例題》x，y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+2y \leqq 10,\ 4x+y \leqq 20$$

を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。〔類 広島修道大〕

解答　与えられた連立不等式の表す領域を D とする。



$x+2y \leqq 10$ を変形すると　$y \leqq -\dfrac{1}{2}x+5$

$4x+y \leqq 20$ を変形すると　$y \leqq -4x+20$

領域 D は 4 点 $(0,\ 0)$，$(5,\ 0)$，$\left(\dfrac{30}{7},\ \dfrac{20}{7}\right)$，$(5,\ 0)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

$x+y=k$ とおくと　$y=-x+k$　……①

直線①が領域 D の点を通るときの k の値の最大値，最小値を求めればよい。図からわかるように，k の値は直線①が点 $\left(\dfrac{30}{7},\ \dfrac{20}{7}\right)$ を通るとき最大となり，点 $(0,\ 0)$ を通るとき最小となる。

よって，$x+y$ は $x=\dfrac{30}{7}$，$y=\dfrac{20}{7}$ のとき最大値 $\dfrac{50}{7}$ をとり，

$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0 をとる。答

類題　座標平面において，連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$5x+2y \leqq 9$，$x+3y \leqq 7$ の表す領域を D とする。領域 D に含まれる点 $(x,\ y)$ で $k=3x+4y$ を最大とする点の座標は $(x,\ y)=$ ア□ であり，そのときの k の値は イ□ である。〔芝浦工大〕

１４　三角関数の最大・最小　数学Ⅱ

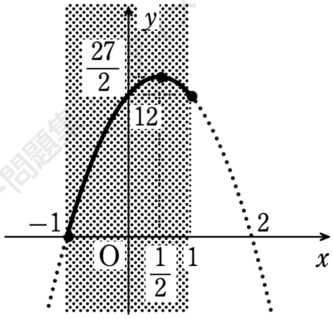
★★
14 《例題》 $y=3\cos 2\theta+6\sin\theta+9$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。　〔類 成蹊大〕

解答 $y=3\cos 2\theta+6\sin\theta+9=3(1-2\sin^2\theta)+6\sin\theta+9$

$=-6\sin^2\theta+6\sin\theta+12$

$x=\sin\theta$ とおく。$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-1\leqq x\leqq 1$

$$y=-6x^2+6x+12=-6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{2}$$



右の図から，y は $x=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{27}{2}$，

$x=-1$ で最小値 0　をとる。

したがって　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ のとき　最大値 $\frac{27}{2}$，

$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき　最小値 0　答

類題　$0\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$ とする。関数 $y=\cos 2\theta-2\cos\theta$ は $\theta=$ ア［　］のとき最小値 イ［　］をとる。

また，y の最大値は ウ［　］である。　〔青山学院大〕

(月 日) | 得 点

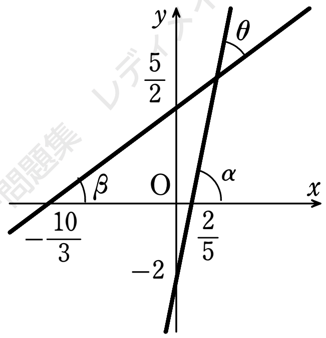
15　2直線のなす角　　数学Ⅱ　　/50

★★
15 《例題》2 直線 $5x-y-2=0$ と $3x-4y+10=0$ のなす角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解答　2 直線の方程式を変形すると

$$y=5x-2,\ \ y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$$

図のように，2 直線と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とすると，2 直線のなす角 θ は $\alpha-\beta$ である。



$\tan\alpha=5$，$\tan\beta=\dfrac{3}{4}$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{5-\dfrac{3}{4}}{1+5\cdot\dfrac{3}{4}}=\frac{17}{19}$$ 答

類題　2 直線 $2x+y-3=0$，$3x-y+2=0$ と x 軸の正の方向とのなす角をそれぞれ α，β とする。

(1)　$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ の値をそれぞれ求めよ。(20 点)

(2)　2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。(30 点)　〔広島工大〕

（　月　日）

得点
／50

１６　三角関数の不等式（合成利用）　数学Ⅱ

★★
16 《例題》 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\theta > \sqrt{3}\cos\theta$ を解け。

解答 $\sin\theta > \sqrt{3}\cos\theta$ から　$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta > 0$

$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ であるから，不等式は

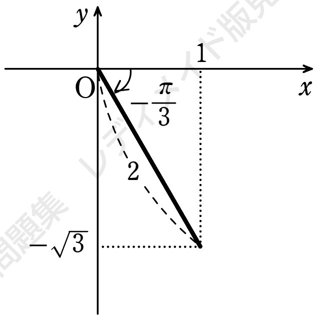
$$2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

すなわち　$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) > 0$　…… ①

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$

よって，① から　$0 < \theta - \frac{\pi}{3} < \pi$

したがって　$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{4}{3}\pi$　答



類 題　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \geqq 1$ を解け。　〔類 摂南大〕

１７　指数・対数の計算　数学Ⅱ

★★
17 《例題》(1)　$2^x+2^{-x}=5$ であるとき，8^x+8^{-x} の値を求めよ。〔大阪工大〕

(2)　$6\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 2+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ を計算せよ。〔武蔵大〕

(3)　$(\log_3 4)(\log_4 2)(\log_2 3)$ の値を求めよ。〔信州大〕

解答　(1)　$8^x+8^{-x}=(2^x)^3+(2^{-x})^3=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x+2^{-x})$　← a^3+b^3

$=(2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})$　$=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=5^3-3\cdot 5=110$　答

(2)　$6\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 2+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\log_3(\sqrt{3})^6-\log_3\sqrt{2}+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　← $k\log_a M$ $=\log_a M^k$

$=\log_3\dfrac{3^3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 3}=\log_3 3^2=2$　答

(3)　$(\log_3 4)(\log_4 2)(\log_2 3)=\log_3 4\cdot\dfrac{\log_3 2}{\log_3 4}\cdot\dfrac{\log_3 3}{\log_3 2}$　← 底の変換公式を利用。

$=\log_3 3=1$　答

類 題　(1)　$3^x-3^{-x}=6$ であるとき，27^x-27^{-x} の値を求めよ。(20 点)　〔東京電機大〕

(2)　$10\log_5\sqrt{5}-\dfrac{1}{3}\log_5 2+\log_5\dfrac{\sqrt[3]{2}}{25}$ を計算せよ。(15 点)　〔京都産大〕

(3)　$(\log_2 3)(\log_5 8)(\log_9 25)$ の値を求めよ。(15 点)　〔大阪工大〕

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

１８　指数・対数の方程式・不等式　数学Ⅱ

★★
18 《**例題**》次の方程式，不等式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+8} \leqq 27^x$ 〔福岡大〕　(2) $4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$ 〔近畿大〕

(3) $\log_2(x+1) + \log_2(x-2) < 2$ 〔同志社大〕　(4) $9(\log_8 x)^2 - 8\log_4 x + 4 = 0$ 〔芝浦工大〕

解答 (1) 不等式を変形すると　$(3^{-1})^{x+8} \leqq (3^3)^x$　よって　$3^{-x-8} \leqq 3^{3x}$

底 3 は 1 より大きいから　$-x-8 \leqq 3x$　これを解いて　$x \geqq -2$ 答

(2) 方程式を変形すると　$(2^2)^x - 2^x \cdot 2^2 - 32 = 0$

すなわち　$(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$　ゆえに　$(2^x + 4)(2^x - 8) = 0$

$2^x > 0$ であるから　$2^x = 8$　よって，$2^x = 2^3$ より　$x = 3$ 答

(3) 真数は正であるから　$x+1>0$，$x-2>0$　よって　$x>2$ ……①

不等式を変形すると　$\log_2(x+1)(x-2) < \log_2 2^2$

底 2 は 1 より大きいから　$(x+1)(x-2) < 4$

整理すると　$x^2 - x - 6 < 0$　ゆえに　$(x+2)(x-3) < 0$

よって　$-2 < x < 3$ ……②　①，② から，解は　$2 < x < 3$ 答

(4) 方程式を変形すると　$9\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 8}\right)^2 - 8\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right) + 4 = 0$

よって　$9\left(\frac{\log_2 x}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{\log_2 x}{2}\right) + 4 = 0$　すなわち　$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 4 = 0$

ゆえに　$(\log_2 x - 2)^2 = 0$　したがって，$\log_2 x = 2$ より　$x = 2^2 = 4$ 答

類題 次の方程式，不等式を解け。((1)(2) 各 10 点　(3)(4) 各 15 点)

(1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4-x} \geqq \left(\frac{1}{8}\right)^x$ 〔浜松大〕　(2) $3^{2x} + 3^{x+1} - 4 = 0$ 〔武蔵大〕

(3) $\log_2(x-4) + \log_2(x-6) < 3$ 〔東京経大〕　(4) $4(\log_4 x)^2 - 3\log_8 x - 2 = 0$ 〔関西大〕

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

(月 日) | 得 点 | /50

１９　桁数，小数首位　　数学Ⅱ

★★
19 《例題》 $\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}5=0.6990$ として，次の問いに答えよ。

(1) 15^{15} の桁数を求めよ。 〔女子栄養大〕

(2) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^{10}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。 〔東京薬大〕

解答 (1) $\log_{10}15^{15}=15\log_{10}(3\times5)=15(\log_{10}3+\log_{10}5)$ ← 常用対数の値を求める。

$=15(0.4771+0.6990)=17.6415$

よって $17<\log_{10}15^{15}<18$ ゆえに $10^{17}<15^{15}<10^{18}$

したがって，15^{15} は 18 桁の数である。 答

(2) $\log_{10}\left(\dfrac{2}{9}\right)^{10}=\log_{10}\left(\dfrac{10}{5\times3^2}\right)^{10}=10\log_{10}\dfrac{10}{5\times3^2}$ ← 常用対数の値を求める。

$=10(\log_{10}10-\log_{10}5-2\log_{10}3)$

$=10(1-0.6990-2\times0.4771)=-6.532$

よって $-7<\log_{10}\left(\dfrac{2}{9}\right)^{10}<-6$ ゆえに $10^{-7}<\left(\dfrac{2}{9}\right)^{10}<10^{-6}$

したがって，$\left(\dfrac{2}{9}\right)^{10}$ は小数第 7 位に初めて 0 でない数字が現れる。 答

類 題 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，次の問いに答えよ。

(1) 18^{50} の桁数を求めよ。(20 点) 〔類 群馬大〕

(2) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{50}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。(30 点) 〔武庫川女子大〕

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

（　月　日）

得　点
／50

２０　曲線外の点を通る接線　数学Ⅱ

★★

20 《**例題**》関数 $y=x^3$ のグラフに点 P$(0,\ 2)$ から引いた接線の方程式は $\boxed{}$ である。〔神奈川大〕

解答 $f(x)=x^3$ とすると　$f'(x)=3x^2$

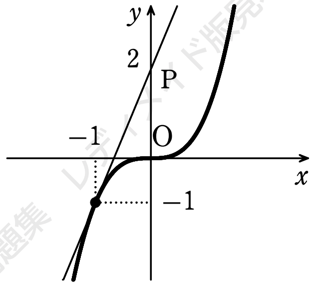
関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ a^3)$ における接線の方程式は

$y-a^3=3a^2(x-a)$　すなわち　$y=3a^2x-2a^3$　……①

この直線が点 P$(0,\ 2)$ を通るから　$2=-2a^3$

a は実数であるから　$a=-1$

ゆえに，直線の方程式は ① から　$y=3x+2$　答



類 題　点 $(0,\ 1)$ から，曲線 $y=x^3-2x+3$ に引いた接線の方程式を求めよ。〔酪農学園大〕

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

（　月　日）

得　点
/50

２１　極値から関数の決定　数学Ⅱ

★★
21 《例題》3 次関数 $f(x)$ は $x=-1$ で極大値 7 をとり，$x=3$ で極小値 -25 をとる。$f(x)$ を求めよ。
〔東京電機大〕

解答 $a \fallingdotseq 0$ とし，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とすると　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(-1)=0$，$f'(3)=0$ であるから　$3a-2b+c=0$ ……①，$27a+6b+c=0$ ……②

②－① から　$24a+8b=0$　よって　$b=-3a$

これを ① に代入して　$9a+c=0$　ゆえに　$c=-9a$

よって　$f(x)=ax^3-3ax^2-9ax+d$

$f(-1)=7$，$f(3)=-25$ であるから　$5a+d=7$，$-27a+d=-25$

ゆえに　$a=1$，$d=2$　よって　$b=-3$，$c=-9$

このとき，$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$ であり，$f(x)$ の増減表は右のようになり，条件を満たす。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ゆえに　$a=1$，$b=-3$，$c=-9$，$d=2$

よって　$f(x)=x^3-3x^2-9x+2$　答

類題　関数 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$ が $x=1$ で極大値 3 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。また，極小値を求めよ。〔京都産大〕

得　点
／50

２２　方程式の実数解の個数　数学Ⅱ

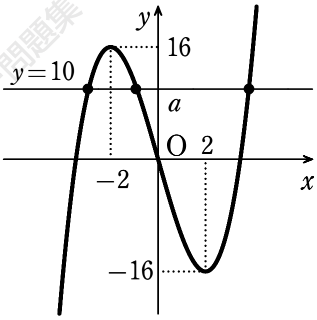
★★
22 《例題》方程式 $x^3-12x-a=0$ の実数解の個数を求めよ。

解答 方程式を変形すると　$x^3-12x=a$　← ＝(定数) の形に変形。

関数 $y=x^3-12x$ について　$y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 16	$\searrow$	極小 -16	$\nearrow$



よって，$y=x^3-12x$ のグラフは，右の図のようになる。

与えられた方程式の実数解の個数は，このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しい。

したがって　$a<-16$，$16<a$ のとき　1 個

$a=\pm16$ のとき　2 個

$-16<a<16$ のとき　3 個　答

類題　方程式 $x^3-6x-a=0$ の実数解の個数を求めよ。　〔倉敷芸科大〕

(　月　日)

得　点
／50

２３　不等式の証明　数学Ⅱ

★★
23 《例題》 $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3+5>3x^2$ を証明せよ。

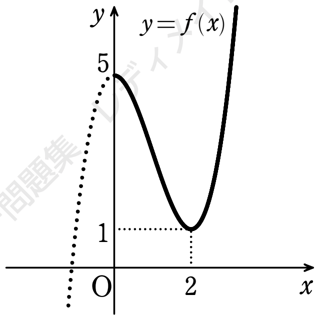
解答 $f(x)=(x^3+5)-3x^2$ とすると　← 左辺−右辺 を $f(x)$ とする。

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 2$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	＋
$f(x)$	5	↘	極小 1	↗



よって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ のとき $x=2$ で最小値 1 をとる。

ゆえに，$x \geqq 0$ のとき　$f(x) \geqq f(2)>0$　← $f(x)$ の最小値>0

すなわち　$x^3+5>3x^2$ 終

類 題　次の不等式を証明せよ。(25 点×2)

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3-3x^2>12x-23$

(2)　$x>1$ のとき　$x^3+3x>3x^2+1$

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

（　月　日）

得　点
／50

24　定積分の値と関数の決定　数学Ⅱ

★★
24 《**例題**》次の条件を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(0)=8,\quad f'(5)=-30,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=7$$

〔広島修道大〕

解答　求める 2 次関数を $f(x)=ax^2+bx+c$ とする。

$f(x)=ax^2+bx+c$ を微分すると　$f'(x)=2ax+b$

また　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c$

$f(0)=8$ から　$c=8$　…… ①

$f'(5)=-30$ から　$10a+b=-30$　…… ②

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=7$ から　$\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+c=7$　…… ③

① を ③ に代入して整理すると　$2a+3b=-6$　…… ④

②，④ を解くと　$a=-3$，$b=0$

したがって　$f(x)=-3x^2+8$　答

類題　次の条件を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(2)=26,\quad f'(2)=18,\quad \int_{-1}^1 f(x)\,dx=6$$

〔近畿大〕

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

（　月　日）

得　点
／50

２５　定積分で表された関数　数学Ⅱ

★★
25 《**例題**》次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x^2+\int_0^1 xf(t)\,dt$$

〔城西大〕

解答　$x^2+\int_0^1 xf(t)\,dt=x^2+x\int_0^1 f(t)\,dt$ であるから　$f(x)=x^2+x\int_0^1 f(t)\,dt$

ここで，$\int_0^1 f(t)\,dt=a$（a は定数）とおくと　$f(x)=x^2+ax$　$\leftarrow \int_0^1 f(t)\,dt$ は定数

よって　$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 (t^2+at)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{a}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}$

ゆえに　$a=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}$　　これを解いて　$a=\frac{2}{3}$

したがって　$f(x)=x^2+\frac{2}{3}x$　答

類題　次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x^2-\int_{-2}^1 2xf(t)\,dt$$

〔類　大分大〕

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

２６　面　積　　数学Ⅱ

★★
26 《**例題**》放物線 $y=2x^2+3x+2$ 上の 2 点 P$(-1,\ 1)$，Q$(1,\ 7)$ における接線と放物線によって囲まれた部分の面積を求めよ。〔東京電機大〕

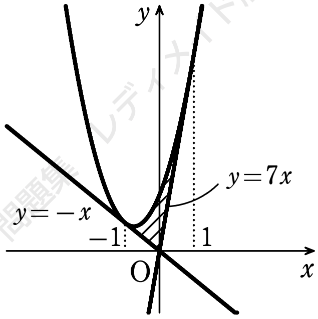
解答 $y=2x^2+3x+2$ から　　$y'=4x+3$

点 P における接線の方程式は

$y-1=-(x+1)$　　すなわち　　$y=-x$

点 Q における接線の方程式は

$y-7=7(x-1)$　　すなわち　　$y=7x$



2 つの接線の交点の x 座標は，$-x=7x$ を解いて　$x=0$

右の図から，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{0}\{(2x^2+3x+2)-(-x)\}dx+\int_{0}^{1}\{(2x^2+3x+2)-7x\}dx$$

$$=2\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+2\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$

$$=2\left(\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{0}^{1}\right)=\frac{4}{3}$$ 答

参考 $\int(x+a)^2dx=\dfrac{(x+a)^3}{3}+C$ が成り立つ。このことを利用すると，積分の計算は

$$S=2\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+2\int_{0}^{1}(x-1)^2dx=2\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0}+2\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}$$ 答

類 **題**　放物線 $y=x^2-x-6$ 上の 2 点 P$(-1,\ -4)$，Q$(3,\ 0)$ における接線と放物線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

27　面積の２等分　数学Ⅱ　／50

★★
27 《**例題**》放物線 $y=x^2-4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，a の値を求めよ。 〔類 関西学院大〕

解答 放物線と直線の交点の x 座標は $x^2-4x=ax$　すなわち

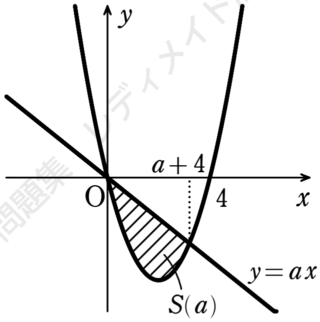
$x\{x-(a+4)\}=0$ を解いて　　$x=0,\ a+4$

図から　　$0<a+4<4$　すなわち　$-4<a<0$

放物線と直線で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とすると

$$S(a)=\int_0^{a+4}\{ax-(x^2-4x)\}dx=-\int_0^{a+4}x\{x-(a+4)\}dx$$

$$=\frac{1}{6}(a+4)^3 \qquad \leftarrow \int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$



放物線と x 軸 $(y=0\cdot x)$ で囲まれた部分の面積は $S(0)$ であるから，直線 $y=ax$ が面積を 2 等分するとき　　$S(0)=2S(a)$

すなわち　　$\dfrac{4^3}{6}=2\cdot\dfrac{1}{6}(a+4)^3$　　　よって　　$(a+4)^3=32$

したがって，$a+4=\sqrt[3]{32}=2\sqrt[3]{4}$ から　　$a=2\sqrt[3]{4}-4$　（$-4<a<0$ を満たす）　答

類題 放物線 $y=x^2-6x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，直線 $y=ax$ が 2 等分するとき，a の値を求めよ。 〔類 自治医大〕

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

（　月　日）

得　点
／50

２８　等差数列　　数学Ｂ

★★

28 《**例題**》第 4 項が 41 で，第 10 項が 17 である等差数列の初項は ア□，公差は イ□ である。また，この数列の初項から第 n 項までの和 S_n は $n=$ ウ□ のとき最大値 エ□ をとる。　［近畿大］

解答　この数列の一般項を a_n，初項を a，公差を d とすると　$a_n=a+(n-1)d$

第 4 項が 41，第 10 項が 17 であるから　$41=a+(4-1)d$，$17=a+(10-1)d$

すなわち　$a+3d=41$，　$a+9d=17$

これを解くと　$a=53$，$d=-4$

したがって，初項は ア53，公差は イ-4　答

よって，一般項は　$a_n=53+(n-1)\cdot(-4)=-4n+57$

$a_n \geqq 0$ とすると　$-4n+57 \geqq 0$　　よって　$n \leqq \dfrac{57}{4}=14.25$　← a_n の符号の変わり目を調べる。

ゆえに，a_1 から a_{14} までは正の数，a_{15} からは負の数となる。

したがって，S_n は $n=$ ウ14 のとき最大となり，その最大値は　← 正の数の項の和が最大。

$$S_{14}=\frac{14}{2}\{2\cdot 53+(14-1)\cdot(-4)\}=\text{エ}378$$　答

類 **題**　第 10 項が 81，第 25 項が 51 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　一般項 a_n を求めよ。

(2)　初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n が最大になるときの n とそのときの S_n の値を求めよ。

［広島工大］

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

（　月　日）

得　点
／50

２９　等比数列　　数学Ｂ

★★
29 《**例題**》第 2 項が 5 で，初項から第 3 項までの和が 31 である等比数列の初項と公比を求めよ。

解答　この数列の初項を a，公比を r とする。

第 2 項が 5 で，初項から第 3 項までの和が 31 であるから

$ar=5$ ……①　　$a+ar+ar^2=31$ ……②

② を変形すると　$a(1+r+r^2)=31$

両辺に r を掛けて　$ar(1+r+r^2)=31r$

これに ① を代入すると　$5(1+r+r^2)=31r$　　整理すると　$5r^2-26r+5=0$

よって　$(r-5)(5r-1)=0$　　ゆえに　$r=5,\ \dfrac{1}{5}$

① から　$r=5$ のとき　$a=1$，　$r=\dfrac{1}{5}$ のとき　$a=25$

したがって　初項 1，公比 5　または　初項 25，公比 $\dfrac{1}{5}$　答

類題　第 2 項が 12 で，初項から第 3 項までの和が 52 である等比数列の初項と公比を求めよ。

〔佛教大〕

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

３０　分数の数列の和　数学Ｂ

★★

30 《**例題**》数列 $\{a_n\}$ は $a_n=\dfrac{2n+14}{n(n+1)(n+2)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で与えられている。このとき，

$a_n=\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{n(n+1)}-\dfrac{{}^{イ}\boxed{}}{(n+1)(n+2)}$ が成り立つ。また，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_n={}^{ウ}\boxed{}-\dfrac{{}^{エ}\boxed{}}{n+1}+\dfrac{{}^{オ}\boxed{}}{n+2}$ である。　〔千葉工大〕

解答　$\dfrac{2n+14}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{a}{n(n+1)}-\dfrac{b}{(n+1)(n+2)}$ とおく。

両辺に $n(n+1)(n+2)$ を掛けると　$2n+14=a(n+2)-bn$

よって　$(a-b)n+2a=2n+14$

これは n の恒等式であるから　$a-b=2,\ 2a=14$　これを解いて　$a={}^{ア}7,\ b={}^{イ}5$　答

ゆえに　$a_n=\dfrac{7}{n(n+1)}-\dfrac{5}{(n+1)(n+2)}=7\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)-5\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

よって　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=7\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)-5\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

$=7\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)-5\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}\right)={}^{ウ}\dfrac{9}{2}-\dfrac{{}^{エ}7}{n+1}+\dfrac{{}^{オ}5}{n+2}$　答

類　題　数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\dfrac{3n+10}{n(n+1)(n+2)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定めるとき，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

３１　群数列　数学B

★★

31 《例題》{1}, {2, 3}, {3, 4, 5}, {4, 5, 6, 7}, {5, 6, 7, 8, 9}, …… について，この順に並べてできる次の数列を考える。 〔類 東京薬大〕

1, 2, 3, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 8, 9, ……

(1) この数列に初めて 99 が現れるのは，第 ア□ 項である。

(2) 数列の第 1999 項は，第 イ□ 群の中の第 ウ□ 番目であり，その数は エ□ である。ただし，{1} を第 1 群，{2, 3} を第 2 群，{3, 4, 5} を第 3 群，……とする。

解答 (1) $1+2+3+\cdots\cdots+k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$ より，第 k 群の末項は最初から数えて $\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 番目の項である。第 k 群の数列は $\{k,\ k+1,\ k+2,\ \cdots\cdots,\ 2k-1\}$ であるから，99 が第 k 群の末項であるとすると　$2k-1=99$　ゆえに　$k=50$

よって，第 50 群の末項に初めて 99 が現れる。

$\dfrac{1}{2}\cdot50\cdot51=1275$ であるから，この数列に初めて 99 が現れるのは，第 ア1275 項である。 答

(2) 第 1999 項が第 l 群に含まれるとすると　$\dfrac{1}{2}(l-1)l<1999\leqq\dfrac{1}{2}l(l+1)$

すなわち　$(l-1)l<3998\leqq l(l+1)$　これを満たす自然数 l は　$l=63$

このとき，$\dfrac{1}{2}(l-1)l=\dfrac{1}{2}\cdot62\cdot63=1953$ より $1999-1953=46$ であるから，第 1999 項は第 イ63 群の中の ウ46 番目の項である。その数は　$63+(46-1)=$ エ108 答

類題 奇数の列を，次のように第 n 群が $2n-1$ 個の数を含むように分ける。

{1}, {3, 5, 7}, {9, 11, 13, 15, 17}, {19, 21, 23, 25, 27, 29, 31}, ……

(1) 第 n 群の最初の自然数を求めよ。(25 点)　　(2) 2005 は第何群の何番目に現れるか。(25 点)

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

３２　階差数列　数学Ｂ

★★
32 《例題》次の数列の一般項 a_n と，第 n 項までの和 S_n を求めよ。〔札幌学院大〕

4，7，14，25，40，59，……

解答 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　3，7，11，15，……

これは初項 3，公差 4 の等差数列であるから　$b_n=3+(n-1)\cdot 4=4n-1$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=4+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)=4+4\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$

$=4+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$

よって　$a_n=2n^2-3n+5$　…… ①

初項は $a_1=4$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2n^2-3n+5$　答

また　$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3k+5)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5$

$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+5n$

$=\frac{1}{6}n\{2(n+1)(2n+1)-9(n+1)+30\}=\frac{1}{6}n(4n^2-3n+23)$　答

類 題　次の数列の一般項 a_n と，第 n 項までの和 S_n を求めよ。〔広島経大〕

6，8，18，36，62，……

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

（　月　日）

得　点
／50

３３　漸化式（おき換え）　数学Ｂ

★★
33 《例題》数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$，$a_{n+1}-3a_n=3^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義されている。

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2) b_n を n を用いて表せ。　(3) a_n を n を用いて表せ。　〔北海学園大〕

解答 (1) $a_{n+1}-3a_n=3^n$ の両辺を $3^{n+1}\,(>0)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}$$

よって　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{3}$ 答

(2) $b_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$

(1) より，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列であるから

$$b_n=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$$ 答

(3) $a_n=3^nb_n$ であるから　$a_n=3^n\cdot\dfrac{n}{3}=n\cdot3^{n-1}$ 答

類題 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=0$，$a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義する。

(1) a_2，a_3 を求めよ。(10 点)

(2) $b_n=a_n-2^n$ とするとき，b_{n+1} を b_n で表せ。(20 点)

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(20 点)　〔龍谷大〕

数研版　オーダー問題集　印刷不可　レディメイド版見本

（　月　日）

得　点
／50

３４　数学的帰納法　数学Ｂ

★★

34 《例題》 n が自然数のとき，$2^{3n}-2^n$ は 6 の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ。

［城西大］

解答 「$2^{3n}-2^n$ は 6 の倍数である」 ……(A)

［1］ $n=1$ のとき　$2^{3\cdot1}-2^1=6$

よって，(A) は成り立つ。

［2］ $n=k$ のとき，(A) が成り立つ，すなわち $2^{3k}-2^k$ は 6 の倍数であると仮定すると，m を整数として，$2^{3k}-2^k=6m$ と表される。

$n=k+1$ のときを考えると

$$2^{3(k+1)}-2^{k+1}=2^3\cdot2^{3k}-2\cdot2^k=8\cdot2^{3k}-2\cdot2^k$$
$$=8(2^{3k}-2^k)+6\cdot2^k$$
$$=8\cdot6m+6\cdot2^k=6(8m+2^k)$$

$8m+2^k$ は整数であるから，$2^{3(k+1)}-2^{k+1}$ は 6 の倍数である。

したがって，$n=k+1$ のときにも (A) は成り立つ。

［1］，［2］から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ。 終

類 題　すべての自然数 n について，$3^{2n}+4^{n+1}$ は 5 の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ。

［中部大］

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

得　点
／50

３５　ベクトルの大きさの最小値　　数学Ｃ

★★
35 《例題》$\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。　［類 明治学院大］

解答 $\vec{a}+t\vec{b}=(3,\ -1)+t(1,\ 1)=(3+t,\ -1+t)$

よって　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(3+t)^2+(-1+t)^2$　← $|\vec{p}|$ は $|\vec{p}|^2$ として扱う。

$=2t^2+4t+10=2(t+1)^2+8$　← 平方完成

ゆえに，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-1$ のとき最小値 8 をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小となるとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって　$t=-1$ のとき最小値 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$　答

類 題 (1) $\vec{a}=(-3,\ 4)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。(25 点)　［類 共立薬大］

(2) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。(25 点)　［類 大阪工大］

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

（　月　日）

得　点
／50

３６　ベクトルのなす角　数学Ｃ

★★
36 《例題》 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$ であり，$4\vec{a}-5\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ が直交するとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

〔北見工大〕

解答 $4\vec{a}-5\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ が直交するから　$(4\vec{a}-5\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=0$

したがって　$8|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$ であるから

$$8-6\vec{a}\cdot\vec{b}-5=0 \qquad よって \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot1}=\frac{1}{2}$$

← θ はベクトルのなす角
$\Longrightarrow$ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　$\theta=60^\circ$　答

類題 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ であり，$\vec{a}-\vec{b}$ と $5\vec{a}+2\vec{b}$ が直交するとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。

〔類 玉川大〕

数研版 オーダー問題集 印刷不可 レディメイド版見本

（　月　日）

得　点
／50

３７　交点の位置ベクトル　数学Ｃ

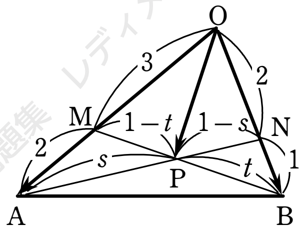
★★
37 《例題》△OAB において，辺 OA を 3 : 2 に内分する点を M，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を N とし，線分 AN，BM の交点を P とする。ベクトル $\overrightarrow{OP}$ をベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

〔大分大〕

解答　AP : PN $=s:(1-s)$，BP : PM $=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{ON}=(1-s)\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}s\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OM}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$



$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{OA}\nparallel\overrightarrow{OB}$ であるから　← この断りを明記。

$$1-s=\frac{3}{5}t,\quad \frac{2}{3}s=1-t$$

よって　$5s+3t=5,\quad 2s+3t=3$

これを解いて　$s=\frac{2}{3}$，$t=\frac{5}{9}$　　したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{OB}$ 答

類題　△OAB において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を M，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を N とし，線分 AN，BM の交点を P とする。ベクトル $\overrightarrow{OP}$ をベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

〔類 西南学院大〕

（　月　日）

得　点
／50

３８　垂直な単位ベクトル　数学Ｃ

★★

38 《例題》2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ 0)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。〔信州大〕

解答　求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　すなわち　$2x+y+3z=0$ …… ①

$\vec{b}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$　すなわち　$x-y=0$ …… ②

$|\vec{e}|=1$ であるから　$x^2+y^2+z^2=1$ …… ③

①，② から　$y=x,\ z=-x$

これらを ③ に代入すると　$x^2+x^2+(-x)^2=1$

すなわち　$3x^2=1$　ゆえに　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，求める単位ベクトルは

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ 答

類題　2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 3,\ -4)$，$\vec{b}=(-3,\ -2,\ 1)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

〔法政大〕

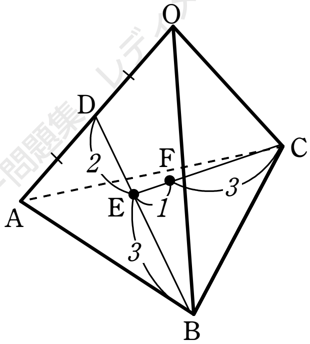
数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可

３９　直線と平面の交点とベクトル　数学Ｃ

★★
39 《例題》 四面体OABCにおいて，辺OAを1 : 1に内分する点をD，線分BDを3 : 2に内分する点をE，線分CEを3 : 1に内分する点をF，直線OFと平面ABCの交点をPとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。 ［名古屋市大］

解答 Eは線分BDを3 : 2に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$
$$=\frac{3}{10}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$



Fは線分CEを3 : 1に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+3\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{3+1}=\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{10}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)$$
$$=\frac{9}{40}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

Pは直線OF上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OF}}$（$k$は実数）と表される。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{9}{40}k\vec{a}+\frac{3}{10}k\vec{b}+\frac{1}{4}k\vec{c}$

Pは平面ABC上にあるから　$\frac{9}{40}k+\frac{3}{10}k+\frac{1}{4}k=1$　よって　$k=\frac{40}{31}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{9}{31}\vec{a}+\frac{12}{31}\vec{b}+\frac{10}{31}\vec{c}$ 答

類題 1辺の長さが1の立方体ABCD−EFGHにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$とおく。対角線AGと平面BDEとの交点をPとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。 ［類 鳥取大］

数研版 オーダー問題集 レディメイド版見本 印刷不可

得　点
／50

４０　平面に下ろした垂線の足の座標　数学Ｃ

★★
40 《例題》3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(-1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ -1,\ 1)$ の定める平面を α とし，原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。このとき，点 H の座標を求めよ。

解答 $\overrightarrow{AB}=(-2,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\ -1,\ 1)$

H は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$（$s$，$t$ は実数）と表される。

よって　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

$=(1,\ 0,\ 0)+s(-2,\ 1,\ 0)+t(0,\ -1,\ 1)$

$=(1-2s,\ s-t,\ t)$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ であるから　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ゆえに　$(1-2s)\cdot(-2)+(s-t)\cdot1+t\cdot0=0$　すなわち　$5s-t=2$　……①

$(1-2s)\cdot0+(s-t)\cdot(-1)+t\cdot1=0$　すなわち　$-s+2t=0$　……②

①，② を解いて　$s=\dfrac{4}{9}$，$t=\dfrac{2}{9}$　　したがって，点 H の座標は　$\left(\dfrac{1}{9},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$ 答

類 題　3 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 4)$ の定める平面を α とし，原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。このとき，点 H の座標を求めよ。

数研版　オーダー問題集　レディメイド版見本　印刷不可