内容見本用 目次

実際の書籍には，これと同内容のものが表紙裏に入ります。

（　　月　　日）

得　点
／50

1　　多項式の計算　　　　数学Ⅰ

★★
1 《例題》 (1)　$A=-x^2+3x+2$，$B=2x^2+x-3$，$C=3x^2-4x-5$ であるとき，
$2A-\{B+(A-2C)\}$ を計算せよ。　〔東北生活文化大〕

(2)　$-\dfrac{1}{3}x^2y^3\times(-6x^2y)^2$ を計算せよ。　〔東京家政大〕

解答 (1)　$2A-\{B+(A-2C)\}=2A-B-(A-2C)=2A-B-A+2C$

$=A-B+2C$

$=(-x^2+3x+2)-(2x^2+x-3)+2(3x^2-4x-5)$

$=-x^2+3x+2-2x^2-x+3+6x^2-8x-10$

$=3x^2-6x-5$　答

(2)　$-\dfrac{1}{3}x^2y^3\times(-6x^2y)^2=-\dfrac{1}{3}x^2y^3\times(-6)^2(x^2)^2y^2=-\dfrac{1}{3}x^2y^3\times36x^4y^2$

$=-12x^6y^5$　答

類 題 (1)　$A=x^2+2x-1$，$B=-3x+2-4x^2$，$C=5-3x^2$ であるとき，$A-\{B-2(2A+C)\}$
を計算せよ。(30点)　〔山梨学院大〕

(2)　$(2x^3y)^2\times(-4x^2y^3)^3$ を計算せよ。(20点)　〔東邦学園大〕

（　月　日）

得　点
／50

2　展開の公式　　数学 I

★★
2 《例題》 次の式を展開せよ。

(1) $(3x-2y+z)^2$　　(2) $(a^2-4ab+b^2)(a^2+4ab+b^2)$

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

解答 (1) $(3x-2y+z)^2=\{(3x-2y)+z\}^2=(3x-2y)^2+2(3x-2y)z+z^2$

$=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2y+(2y)^2+6xz-4yz+z^2$

$=9x^2-12xy+4y^2+6xz-4yz+z^2$

$=9x^2+4y^2+z^2-12xy-4yz+6zx$ 答

(2) $(a^2-4ab+b^2)(a^2+4ab+b^2)=\{(a^2+b^2)-4ab\}\{(a^2+b^2)+4ab\}$

$=(a^2+b^2)^2-(4ab)^2=(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2-16a^2b^2$

$=a^4-14a^2b^2+b^4$ 答

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x+1)(x+4)\times(x+2)(x+3)$　← 掛ける組み合わせを工夫

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=\{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\}$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$

$=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24$

$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$ 答

類 題　次の式を展開せよ。((1)(2) 各 15 点　(3) 20 点)

(1) $\{(-x)^3-y+z\}^2$　　(2) $(x^2+3x+2)(x^2-3x+2)$

(3) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

3　因数分解　数学Ⅰ

★★
3　《例題》　次の式を因数分解せよ。

(1)　$6x^2+7xy+2y^2+x-2$

(2)　$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

(3)　$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz$

解答　(1)　$6x^2+7xy+2y^2+x-2$

$=6x^2+(7y+1)x+2(y^2-1)$

$=6x^2+(7y+1)x+2(y+1)(y-1)$

$=\{2x+(y-1)\}\{3x+2(y+1)\}$

$=(2x+y-1)(3x+2y+2)$　答

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & y-1 & \longrightarrow & 3y-3 \\ 3 & & 2(y+1) & \longrightarrow & 4y+4 \\ \hline 6 & & 2(y+1)(y-1) & & 7y+1 \end{array}$$

(2)　$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=(x-3)(x+4)\times(x-1)(x+2)+24$　　← 掛ける組み合わせを工夫

$=(x^2+x-12)(x^2+x-2)+24=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+48$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)=(x+3)(x-2)(x^2+x-8)$　答

(3)　$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+2xyz$

$=x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+2xyz$

$=(y+z)x^2+(y^2+2yz+z^2)x+yz(y+z)$　　← x について整理

$=(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}$

$=(y+z)(x+y)(x+z)=(x+y)(y+z)(z+x)$　答

類 **題**　次の式を因数分解せよ。((1)(2) 各 15 点　(3) 20 点)

(1)　$3x^2-4y^2+4xy-8x+8y-3$

(2)　$(x-1)(x+1)(x+4)(x+6)-24$

(3)　$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

4　平方根と式の値　数学Ⅰ

★★
4 《例題》 (1) $a=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，a^2+b^2，a^3+b^3 の値を求めよ。

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$a^2+4ab+4b^2$ の値を求めよ。

[(1) 類 関東学院大　(2) 北海学園大]

解答 (1) $a+b=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$ ← 通分すると，分母が有理化される。

$=\dfrac{(5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})}{3-2}=10$

$ab=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1$

よって　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=10^2-2\cdot1=98$ 答

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=10^3-3\cdot1\cdot10=970$ 答

(2) $\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}=\dfrac{2(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\dfrac{2(\sqrt{6}+2)}{6-4}=\sqrt{6}+2$

$2<\sqrt{6}<3$ であるから　$4<\sqrt{6}+2<5$　よって　$a=4$，$b=(\sqrt{6}+2)-a=\sqrt{6}-2$

したがって　$a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2=\{4+2(\sqrt{6}-2)\}^2=(2\sqrt{6})^2=24$ 答

類題 (1) $a=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ のとき，a^2-b^2，a^3+b^3 の値を求めよ。(30 点)

(2) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$a+\dfrac{1}{b}$ の値を求めよ。(20 点)

[(1) 京都産大　(2) 名古屋経大]

（　月　日）

得　点
／50

5　絶対値を含む方程式　　数学Ⅰ

★★
5 《例題》　方程式 $2|x|+2|x-2|=3x+10$ を解け。　〔類　近畿大〕

解答 [1]　$x<0$ のとき　$|x|=-x$，$|x-2|=-(x-2)$

よって，方程式は　$-2x-2(x-2)=3x+10$　すなわち　$7x+6=0$

これを解いて　$x=-\dfrac{6}{7}$　これは $x<0$ を満たす。

[2]　$0\leqq x<2$ のとき　$|x|=x$，$|x-2|=-(x-2)$

よって，方程式は　$2x-2(x-2)=3x+10$　すなわち　$3x+6=0$

これを解いて　$x=-2$　これは $0\leqq x<2$ を満たさない。

[3]　$2\leqq x$ のとき　$|x|=x$，$|x-2|=x-2$

よって，方程式は　$2x+2(x-2)=3x+10$　すなわち　$x-14=0$

これを解いて　$x=14$　これは $2\leqq x$ を満たす。

したがって，解は　$x=-\dfrac{6}{7}$，14　答

類題　方程式 $|x|+2|x-1|=x+3$ を解け。　〔明治大〕

(月 日) | 得 点 ／50

6 必要条件と十分条件 数学Ⅰ

★★
6 《例題》 次の $\boxed{}$ にあてはまるものを下の ① ～ ④ の中から選べ。

(1) 実数 a，b について，$a>0$ かつ $b>0$ は，$ab>0$ であるための ア$\boxed{}$ 。

(2) 2 つの三角形の面積が等しいことは，それらが合同であるための イ$\boxed{}$ 。

① 必要条件であるが十分条件でない　② 十分条件であるが必要条件でない

③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でもない

［(2) 大東文化大］

解答 (1) $a>0$ かつ $b>0$ のとき　$ab>0$

よって，「$a>0$ かつ $b>0 \Longrightarrow ab>0$」は真である。

また，$ab>0$ のとき　($a>0$ かつ $b>0$) または ($a<0$ かつ $b<0$)

よって，「$ab>0 \Longrightarrow a>0$ かつ $b>0$」は偽である。(反例：$a=-1$，$b=-2$)

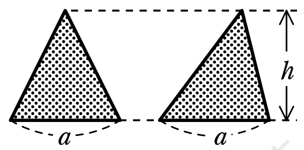
ゆえに，$a>0$ かつ $b>0$ は，$ab>0$ であるための十分条件であるが必要条件でない。

答 ア②

(2) 2 つの三角形の面積が等しいとき，それらが合同とは限らない。(反例：右図)

また，合同な 2 つの三角形は明らかに面積が等しい。

ゆえに，2 つの三角形の面積が等しいことは，それらが合同であるための必要条件であるが十分条件でない。 答 イ①



類 **題** 次の $\boxed{}$ にあてはまるものを《例題》の ① ～ ④ の中から選べ。(25 点×2)

(1) 実数 x，y について，$xy<0$ は，$x^2+y^2>0$ であるための ア$\boxed{}$ 。

(2) 半径 5 の円に内接する $\triangle$ABC について，BC$=10$ は，$\angle$BAC$=90^\circ$ であるための イ$\boxed{}$ 。

［(1) 愛知学泉大，(2) 関東学院大］

（　月　日）

得　点
/50

7　命題の証明と対偶　数学Ⅰ

★★
7 《例題》 n を整数とする。命題「n^2 が 5 の倍数ならば n は 5 の倍数である」…… ① の対偶を書け。
また，命題 ① が真であることを示せ。 〔公立はこだて未来大〕

解答　対偶は　「n が 5 の倍数でないならば n^2 は 5 の倍数でない」 …… ②　答

n が 5 の倍数でないならば，n は $5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$ （k は整数) のどれかで表される。

[1]　$n=5k+1$ のとき　$n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1$

[2]　$n=5k+2$ のとき　$n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$

[3]　$n=5k+3$ のとき　$n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$

[4]　$n=5k+4$ のとき　$n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$

いずれの場合も，n^2 は 5 の倍数でない。

よって，② は真である。

対偶が真であるから，命題 ① は真である。　終

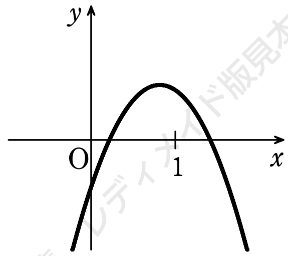
類題　次の命題を問いにしたがって証明せよ。ただし，a は整数とする。

「a^2 が 3 の倍数ならば，a は 3 の倍数である」

(1)　この命題の対偶をいえ。(10 点)　(2)　対偶を証明せよ。(40 点)　〔獨協大〕

8　2次関数のグラフ　数学Ⅰ

★★
8 《例題》 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになっているとき，a，b，c，および $a+b+c$ の符号をいえ。〔類 明海大〕



解答　グラフが上に凸であるから　　$a<0$　答

$y=ax^2+bx+c$ を変形すると

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

よって，軸は　直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$　　　軸の位置から　$-\dfrac{b}{2a}>0$

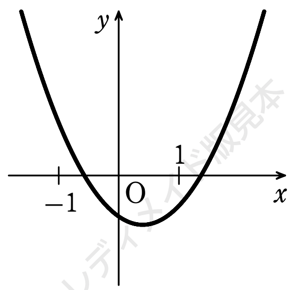
$a<0$ であるから　　$b>0$　答

グラフは y 軸と点 $(0,\ c)$ で交わるから　　$c<0$　答

また，$x=1$ のとき $y=a+b+c$ で，グラフから　　$a+b+c>0$　答

類題　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになっているとき，a，b，c，および $a+b+c$，$a-b+c$ の符号をいえ。

〔奈良産大〕



（　月　日）

得　点
／50

9　2次関数の最大・最小　　数学Ⅰ

★★
9 《例題》 a は定数とする。2次関数 $y=x^2-2ax+2a+1$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最小値を m とする。

(1)　$a<0$ のとき　$m=$ ア $\boxed{}$　　(2)　$0 \leqq a<3$ のとき　$m=$ イ $\boxed{}$

(3)　$3 \leqq a$ のとき　$m=$ ウ $\boxed{}$　　〔愛知学泉大〕

解答　$y=x^2-2ax+2a+1=(x^2-2ax+a^2)-a^2+2a+1=(x-a)^2-a^2+2a+1$

ゆえに，この関数のグラフは，軸が直線 $x=a$ で，下に凸の放物線である。

(1)　$a<0$ のとき　$0 \leqq x \leqq 3$ におけるグラフは［図1］の実線部分のようになる。

よって，y は $x=0$ で最小となり，その最小値 m は　　$m=$ ア $2a+1$　答

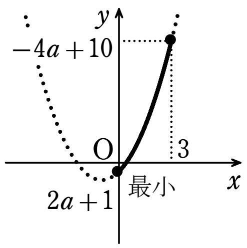
(2)　$0 \leqq a<3$ のとき　$0 \leqq x \leqq 3$ におけるグラフは［図2］の実線部分のようになる。

よって，y は $x=a$ で最小となり，その最小値 m は　　$m=$ イ $-a^2+2a+1$　答

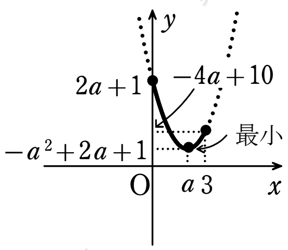
(3)　$3 \leqq a$ のとき　$0 \leqq x \leqq 3$ におけるグラフは［図3］の実線部分のようになる。

よって，y は $x=3$ で最小となり，その最小値 m は　　$m=$ ウ $-4a+10$　答

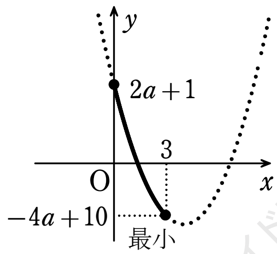
［図1］



［図2］



［図3］



類題　a は定数とする。2次関数 $y=-x^2+2ax+4a+4$ の $-1 \leqq x \leqq 3$ における最大値を M とする。（(1) 15点　(2) 20点　(3) 15点）

(1)　$a<-1$ のとき　$M=$ ア $\boxed{}$　　(2)　$-1 \leqq a<3$ のとき　$M=$ イ $\boxed{}$

(3)　$3 \leqq a$ のとき　$M=$ ウ $\boxed{}$　　〔中部大〕

得　点
／50

１０　２次関数の決定　数学Ⅰ

★★
10 《例題》 (1) 放物線 $y=-x^2+ax-b$ は点 (2, 1) を通り，頂点が直線 $y=2x-4$ 上にある。このとき，a，b の値を求めよ。〔中京大〕

(2) 放物線 $y=x^2+ax+b$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，放物線 $y=x^2+x+1$ になるという。定数 a，b の値を求めよ。〔北海学園大〕

解答 (1) 放物線が点 (2, 1) を通るから　$1=-2^2+a\cdot 2-b$　すなわち　$b=2a-5$ ……①

また，$y=-x^2+ax-b$ を変形すると　$y=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}-b$

よって，頂点の座標は　$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}-b\right)$

これが直線 $y=2x-4$ 上にあるから　$\dfrac{a^2}{4}-b=2\cdot\dfrac{a}{2}-4$ ……②

① を ② に代入して整理すると　$a^2-12a+36=0$

よって　$(a-6)^2=0$　ゆえに　$a=6$

① に代入して　$b=2\cdot 6-5=7$　したがって　$a=6$，$b=7$ 答

(2) 放物線 $y=x^2+x+1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると

$y+3=(x+2)^2+(x+2)+1$　← 逆の移動を考える。

すなわち　$y=x^2+5x+4$　したがって　$a=5$，$b=4$ 答

類題 (1) 放物線 $y=-x^2+2ax-8$ の頂点が放物線 $y=2x^2+x-10$ 上にあるとき，a の値を求めよ。(30 点)〔石巻専修大〕

(2) 放物線 $y=x^2+ax+b$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，放物線 $y=x^2-4x+2$ になるという。定数 a，b の値を求めよ。(20 点)〔拓殖大〕

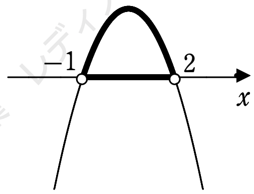
１１　２次不等式の応用 (1)　数学Ⅰ

★★
11 《例題》 (1)　$ax^2+x+b>0$ の解が $-1<x<2$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

(2)　2 次不等式 $x^2-2kx+4(k+3)>0$ がすべての実数 x に対して成り立つとき，k のとりうる値の範囲を求めよ。

〔(1) 倉敷芸科大　(2) 国士舘大〕

解答 (1)　条件から，$y=ax^2+x+b$ のグラフは上に凸の放物線で，
2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るから



$a<0$　…… ①，

$a-1+b=0$　…… ②，　$4a+2+b=0$　…… ③

②，③ から　$a=-1$，$b=2$　答　これは ① を満たす。

別解　$-1<x<2$ を解にもつ 2 次不等式は　$(x+1)(x-2)<0$

すなわち　$x^2-x-2<0$

両辺に -1 を掛けて　$-x^2+x+2>0$

$ax^2+x+b>0$ と係数を比較して　$a=-1$，$b=2$　答

(2)　2 次方程式 $x^2-2kx+4(k+3)=0$ の判別式を D とすると，2 次不等式
$x^2-2kx+4(k+3)>0$ がすべての実数 x に対して成り立つための条件は

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-4(k+3)<0$$

よって　$(k+2)(k-6)<0$　ゆえに　$-2<k<6$　答

類題 (1)　2 次不等式 $ax^2+bx+3>0$ の解が $-1<x<3$ であるとき，a，b の値を求めよ。(30 点)

(2)　不等式 $x^2-2x\geqq kx-4$ の解がすべての実数であるような定数 k の値の範囲を求めよ。(20 点)

〔(1) 高岡法科大　(2) 金沢工大〕

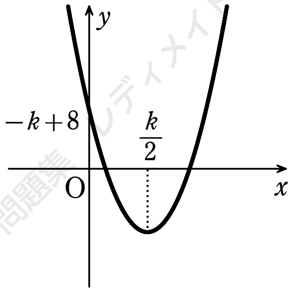
１２　２次不等式の応用 (2)　数学Ⅰ

★★
12 《例題》 2 次方程式 $x^2-kx-k+8=0$ が異なる 2 つの正の解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。 ［千葉経大］

解答 $f(x)=x^2-kx-k+8$ とおくと

$$f(x)=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}-k+8$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの軸は　直線 $x=\frac{k}{2}$



2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつことは，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わることと同じで，そのための条件は

$$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot(-k+8)>0 \quad \cdots\cdots ①$$

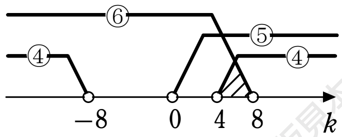
軸について　$\frac{k}{2}>0$　……②，　$f(0)=-k+8>0$　……③

① から　$k^2+4k-32>0$　　よって　$(k+8)(k-4)>0$

ゆえに　$k<-8$，$4<k$　……④

② から　$k>0$　……⑤

③ から　$k<8$　……⑥



④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて　$4<k<8$　答

類題　2 次方程式 $x^2-ax+3a-5=0$ が異なる 2 つの正の解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。 ［摂南大］

（　月　日）

得　点
／50

１３　三角比の相互関係　数学Ⅰ

★★
13 《例題》 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。〔名城大〕

解答 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

よって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$　答

また　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\frac{11}{16}$$ 答

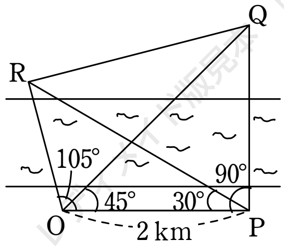
類 題 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ であるとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値を求めよ。〔埼玉工大〕

（　月　日）

得　点
／50

１４　正弦定理・余弦定理　数学Ⅰ

★★
14 《**例題**》 川の向こうにある 2 地点 R，Q の距離を求めるために，2 km 離れた 2 地点 O，P において，∠ROP，∠QOP，∠RPO，∠QPO を測定すると右の図のような値が得られた。このとき，R，Q 間の距離を求めよ。 〔南九州大〕



解答 ∠QOP$=45°$，∠QPO$=90°$ であるから，△QOP は直角二等辺三角形である。よって　$\mathrm{OQ}=\sqrt{2}\,\mathrm{OP}=2\sqrt{2}$

また　$\angle\mathrm{ORP}=180°-(\angle\mathrm{ROP}+\angle\mathrm{RPO})=180°-(105°+30°)=45°$

△OPR において，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{OP}}{\sin\angle\mathrm{ORP}}=\dfrac{\mathrm{OR}}{\sin\angle\mathrm{RPO}}$

よって　$\mathrm{OR}=\dfrac{\mathrm{OP}\sin\angle\mathrm{RPO}}{\sin\angle\mathrm{ORP}}=\dfrac{2\sin 30°}{\sin 45°}=2\times\dfrac{1}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

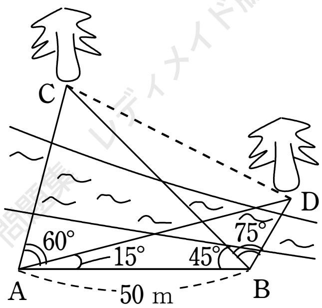
また　$\angle\mathrm{QOR}=\angle\mathrm{ROP}-\angle\mathrm{QOP}=105°-45°=60°$

△QOR において，余弦定理により

$$\mathrm{QR}^2=\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2-2\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}\cos\angle\mathrm{QOR}$$
$$=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos 60°=8+2-8\cdot\dfrac{1}{2}=6$$

$\mathrm{QR}>0$ であるから　$\mathrm{QR}=\sqrt{6}$ (km)　答

類題 川の対岸の 2 地点 C，D に 2 本の高い木が立っている。川のこちら側の 50 m 離れた 2 地点 A，B と 2 本の木の角度を測量したところ，図のようになった。C，D 間の距離を求めよ。ただし，4 地点 A，B，C，D の標高は等しいとする。 〔中部大〕



（　月　日）

得　点
／50

１５　三角形の面積　数学Ⅰ

★★
15 《例題》 △ABC において，BC＝2，CA＝3，AB＝4 のとき，△ABC の面積を求めよ。また，△ABC の内接円の半径を求めよ。［武蔵大］

解答 △ABC において，余弦定理により

$$\cos A=\frac{CA^2+AB^2-BC^2}{2CA\cdot AB}=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{7}{8}$$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$

よって，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}CA\cdot AB\sin A=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$ 答

また，△ABC の内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}(BC+CA+AB)r=\frac{1}{2}(2+3+4)r=\frac{9}{2}r$$

ゆえに　$\frac{9}{2}r=\frac{3\sqrt{15}}{4}$　　したがって　$r=\frac{\sqrt{15}}{6}$ 答

類題 △ABC において，AB＝7，BC＝5，CA＝6 のとき，△ABC の面積を求めよ。また，△ABC の内接円の半径を求めよ。［近畿大］

１６　円に内接する四角形 (三角比)　数学Ⅰ

★★
16 《例題》 円に内接する四角形 ABCD は，AB＝1，BC＝2，CD＝3，DA＝4 である。このとき，cos∠DAB，線分 BD の長さ，四角形 ABCD の面積を求めよ。 〔明海大〕

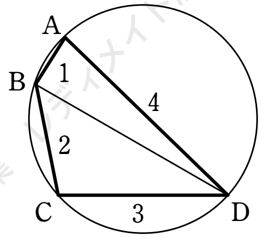
解答 △ABD に余弦定理を適用して

$BD^2=1^2+4^2-2\cdot1\cdot4\cos\angle DAB=17-8\cos\angle DAB$ …… ①

△CBD に余弦定理を適用して

$BD^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos\angle BCD$

$=13-12\cos(180°-\angle DAB)=13+12\cos\angle DAB$ …… ②



①，② から　$17-8\cos\angle DAB=13+12\cos\angle DAB$

よって　$\cos\angle DAB=\dfrac{1}{5}$　答

① に代入して　$BD^2=17-8\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{77}{5}$　　$BD>0$ であるから　$BD=\sqrt{\dfrac{77}{5}}=\dfrac{\sqrt{385}}{5}$　答

$\sin\angle DAB>0$ であるから　$\sin\angle DAB=\sqrt{1-\cos^2\angle DAB}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

また　$\sin\angle BCD=\sin(180°-\angle DAB)=\sin\angle DAB=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

よって　(四角形 ABCD の面積)＝△ABD＋△CBD

$=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle DAB+\dfrac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD$

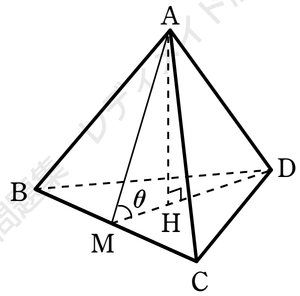
$=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot4\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}+\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=2\sqrt{6}$　答

類 題　円に内接する四角形 ABCD がある。AB＝3，BC＝4，CD＝DA＝2 のとき，cos∠B，線分 AC の長さ，四角形 ABCD の面積 S を求めよ。 〔東京家政大〕

１７　空間図形への応用　数学Ⅰ

★★
17 《**例題**》1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M，$\angle \mathrm{AMD}=\theta$ とする。

(1)　$\cos\theta$ を求めよ。　(2)　正四面体 ABCD の体積を求めよ。　〔岐阜聖徳学園大〕



解答　(1)　$\mathrm{AM}=\mathrm{DM}=\mathrm{AB}\sin 60^\circ=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

よって，△AMD において，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{DM}^2-\mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{DM}}$$

$$=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\quad 答$$

(2)　(1) から　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

頂点 A から線分 DM に垂線 AH を下ろすと　$\mathrm{AH}=\mathrm{AM}\sin\theta=\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

また，△BCD の面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BD}\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

よって，求める正四面体 ABCD の体積 V は　$V=\dfrac{1}{3}S\cdot\mathrm{AH}=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　答

類題　三角錐 PABC において，AB＝BC＝CA＝1，PA＝PB＝PC＝2 であるものとする。

(1)　三角錐 PABC の底面 ABC の面積を求めよ。(20 点)

(2)　三角錐 PABC の体積を求めよ。(30 点)　〔中京学院大〕

（　月　日）

得　点
/50

１８　順列・円順列　数学Ａ

★★
18 《例題》 両親と 3 人の子供が横 1 列に並ぶとき，両親が隣り合う並び方は何通りあるか。また，丸いテーブルの席に座るとき，両親が隣り合う並び方は何通りあるか。〔武蔵大〕

解答 隣り合う両親 2 人をまとめて 1 人とみなし，4 人を横 1 列に並べる方法は ${}_4P_4$ 通りある。

このおのおのの並び方に対して，両親 2 人の並び方は ${}_2P_2$ 通りある。

よって，求める並び方は

$$ {}_4P_4\times{}_2P_2=4\cdot3\cdot2\cdot1\times2\cdot1=48 \text{（通り）} $$ 答

また，丸いテーブルの席に座るときも同様に考える。

4 人が丸いテーブルの席に座るのは，$(4-1)!$ 通りある。

このおのおのの座り方に対して，両親 2 人の並び方は ${}_2P_2$ 通りある。

よって，求める並び方は

$$ (4-1)!\times{}_2P_2=3!\times{}_2P_2=3\cdot2\cdot1\times2\cdot1=12 \text{（通り）} $$ 答

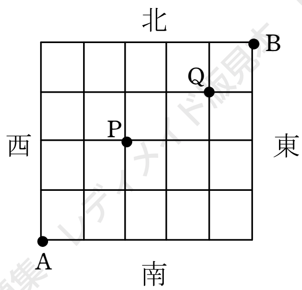
類題 男子 3 人，女子 2 人を横 1 列に並べるとき，両端がともに男子である並べ方は何通りあるか。また，この 5 人を円形に並べるとき，女子が隣り合わない並べ方は何通りあるか。〔東亜大〕

（　月　日）

得　点
／50

１９　最短経路の数　　数学Ａ

★★
19 《例題》 右図のような経路の町があり，ある人が最短距離の道順で，A 地点から B 地点まで行くものとする。



(1) A 地点から B 地点に最短距離で行く道順は全部で何通りあるか。

(2) P，Q 両地点を通過する道順は全部で何通りあるか。　〔広島工大〕

解答 (1) 東に 1 区画進むことを →，北に 1 区画進むことを ↑ で表すと，A 地点から B 地点に最短距離で行く道順の総数は，→ 5 個と ↑ 4 個を 1 列に並べる順列の総数に等しい。

よって　$\dfrac{9!}{5!4!}=126$（通り）　答

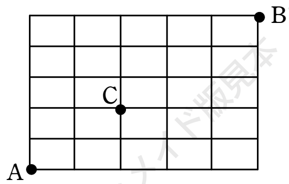
(2) A 地点から P 地点に最短距離で行く道順は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$（通り）

P 地点から Q 地点に最短距離で行く道順は　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）　← (1) と同様に考える。

Q 地点から B 地点に最短距離で行く道順は　2 通り

よって，P，Q 両地点を通過する道順は　$6\times3\times2=36$（通り）　答

類 題　右図のような碁盤の目になっている道路がある。



A から B に行く最短経路について

(1) 最短経路は全部で何通りあるか。(20 点)

(2) C を通らない最短経路は何通りあるか。(30 点)　〔類 神戸学院大〕

（　月　日）

得　点
／50

２０　組分け　　数学Ａ

★★
20 《例題》 9 人の子供を次のようにする方法は，何通りあるか。

(1) 5 人，4 人の 2 組に分ける。　(2) 4 人，3 人，2 人の 3 組に分ける。

(3) 3 人ずつ A，B，C の 3 室に入れる。　(4) 3 人ずつの 3 組に分ける。　〔東京経大〕

解答 (1) 9 人の中から 5 人を選び出すと，5 人，4 人の 2 組に分けられる。

よって，求める方法は　$_9C_5 = {}_9C_4 = \dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 126$（通り） 答

(2) 9 人の中から 4 人を選び出し，残り 5 人の中から 3 人を選び出すと，4 人，3 人，2 人の 3 組に分けられる。

よって，求める方法は　$_9C_4 \times {}_5C_3 = {}_9C_4 \times {}_5C_2 = \dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \times \dfrac{5\cdot4}{2\cdot1} = 1260$（通り） 答

(3) 9 人の中から 3 人を選び出して A に入れ，残り 6 人の中から 3 人を選び出して B に入れ，残りの 3 人を C に入れる。

よって，求める方法は　$_9C_3 \times {}_6C_3 = \dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} \times \dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 1680$（通り） 答

(4) (3) で A，B，C の区別をなくすと，同じものが 3! 通りずつできる。

よって，求める方法は　$\dfrac{1680}{3!} = \dfrac{1680}{3\cdot2\cdot1} = 280$（通り） 答

類 題 6 冊の異なる本を次のようにする方法は，何通りあるか。　〔大阪樟蔭女子大〕

(1) 3 冊，2 冊，1 冊の 3 組に分ける。　(2) 3 冊，2 冊，1 冊を 3 人の子供に分ける。

(3) 2 冊ずつ 3 人の子供に分ける。　(4) 2 冊ずつ 3 組に分ける。

((1)，(2) 各 10 点　(3)，(4) 各 15 点)

（　　月　　日）

得　点
／50

２１　確　率 (1)　　数学Ａ

★★
21 《**例題**》 赤玉 5 個，白玉 4 個，青玉 3 個が入っている袋から，よくかき混ぜて玉を同時に 3 個取り出す。

(1)　3 個とも赤玉である確率を求めよ。

(2)　3 個とも色が異なる確率を求めよ。

(3)　3 個の玉の色が 2 種類である確率を求めよ。　〔岐阜大〕

解答 (1)　赤玉 5 個から 3 個を取り出す場合であるから，求める確率は　$\dfrac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3}=\dfrac{1}{22}$　答

(2)　赤玉，白玉，青玉をそれぞれ 1 個ずつ取り出す場合であるから，求める確率は

$$\frac{{}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_{12}C_3}=\frac{3}{11}$$　答

(3)　[1]　赤玉と白玉を取り出す場合の数は

$${}_5C_2\times{}_4C_1+{}_5C_1\times{}_4C_2=40+30=70 \text{（通り）}$$

[2]　赤玉と青玉を取り出す場合の数は

$${}_5C_2\times{}_3C_1+{}_5C_1\times{}_3C_2=30+15=45 \text{（通り）}$$

[3]　白玉と青玉を取り出す場合の数は

$${}_4C_2\times{}_3C_1+{}_4C_1\times{}_3C_2=18+12=30 \text{（通り）}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{70+45+30}{{}_{12}C_3}=\dfrac{145}{220}=\dfrac{29}{44}$　答

類 **題**　白玉 3 個，赤玉 4 個，黒玉 5 個が入っている袋から同時に 3 個の玉を取り出す。

(1)　3 個の玉の色がすべて同じである確率を求めよ。(20 点)

(2)　3 個の玉の色が 2 種類である確率を求めよ。(30 点)　〔成城大〕

（　月　日）

得 点
/50

２２　確　率 (2)　　数学Ａ

★★
22《例題》 2 桁の自然数 10，11，12，……，99 の数を 1 枚に 1 つずつ書いたカードが箱の中に入っている。この箱から 1 枚のカードを取り出すとき，その自然数が 3 の倍数であるという事象を A，5 の倍数であるという事象を B とする。このとき，次の確率を求めよ。〔関東学院大〕

(1)　$P(A)$　　(2)　$P(B)$　　(3)　$P(A\cap B)$　　(4)　$P(A\cup B)$

解答

(1)　2 桁の自然数のカードは全部で 90 枚ある。

$A=\{3\cdot4,\ 3\cdot5,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$ で，3 の倍数のカードは 30 枚あるから

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$$　答

(2)　$B=\{5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot19\}$ で，5 の倍数のカードは 18 枚あるから

$$P(B)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$$　答

(3)　$A\cap B$ は 3 と 5 の最小公倍数 15 の倍数の事象である。

$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot6\}$ で，15 の倍数のカードは 6 枚あるから

$$P(A\cap B)=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$$　答

(4)　和事象の確率から　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$　答

類 **題**　0 から 5 の 6 種類の数字が表記された 2 つのさいころがある。この 2 つのさいころを投げるとき，次の確率を求めよ。ただし，0 は 5 の倍数で偶数とする。〔沖縄国際大〕

(1)　目の和が 5 となる確率

(2)　目の和が 5 の倍数となる確率

(3)　目の和が奇数となる確率

(4)　目の和が奇数または 5 の倍数となる確率

((1) 5 点　(2) 10 点　(3) 15 点　(4) 20 点)

（　月　日）

得点
/50

２３　反復試行の確率　　数学Ａ

★★
23 《例題》　数直線上を原点から出発して，さいころを投げて偶数が出たら右へ1，奇数が出たら左へ1進むことにする。さいころを10回投げるとき，原点にいる確率は ア□ であり，原点から右へ2だけ進んだ点にいる確率は イ□ である。　〔神奈川工科大〕

解答　偶数の目が x 回出るとすると，奇数の目は $10-x$ 回出る。

数直線の右へ1進むことを $+1$，左へ1進むことを -1 とすると，さいころを10回投げた後の点の位置は $x-(10-x)=2x-10$ と表される。

$2x-10=0$ とすると　$x=5$

よって，原点にいるのは偶数が5回，奇数が5回出る場合である。

したがって，原点にいる確率は　$${}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^{10}}={}^{ア}\frac{63}{256}$$ 答

また，$2x-10=2$ とすると　$x=6$

よって，原点から右へ2だけ進んだ点にいるのは偶数が6回，奇数が4回出る場合である。

したがって，原点から右へ2だけ進んだ点にいる確率は

$${}_{10}\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4={}_{10}\mathrm{C}_4\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^{10}}={}^{イ}\frac{105}{512}$$ 答

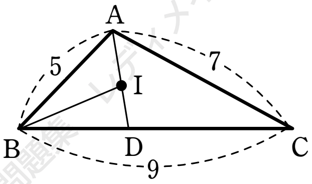
類題　x 軸上を動く点Pがある。さいころを投げて，4以下の目が出れば点Pは x 軸上の正の方向に3だけ進み，5以上の目が出れば x 軸上の負の方向に1だけ進むことにする。さいころを4回投げたとき，原点から出発した点Pが原点にある確率は ア□，$x=1$ の点にある確率は イ□，$x=-4$ の点にある確率は ウ□ である。　〔西南学院大〕

（　月　日）　得点　／50

２４　三角形の内心　　数学Ａ

★★
24 《例題》 AB$=5$，BC$=9$，CA$=7$ である △ABC の内心を I とする。AI と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。

(1) 線分 BD の長さ　　　(2) AI : ID



解答 I は △ABC の内心であるから，3 つの内角の二等分線の交点である。

(1) △ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

AB : AC＝BD : DC

すなわち　5 : 7＝BD : (9－BD)

よって　5(9－BD)＝7BD

これを解いて　$\mathrm{BD}=\dfrac{15}{4}$　答

(2) △ABD において，BI は ∠B の二等分線であるから

AB : BD＝AI : ID

よって　$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=5:\dfrac{15}{4}=4:3$　答

類題 AB$=6$，BC$=10$，CA$=9$ である △ABC の内心を I とする。AI と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。((1) 30 点　(2) 20 点)

(1) 線分 BD の長さ　　　(2) AI : ID

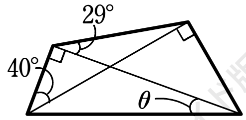
(　月　日)

得　点
/50

２５　円周角の定理　　数学Ａ

★★

25 《例題》 右の図において，角 θ を求めよ。



解答 右の図のように，4 点 A，B，P，Q をとる。

$\angle APB = \angle AQB = 90°$ であるから，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，P，Q は 1 つの円周上にある。

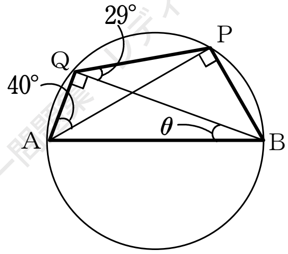
よって，同じ弧に対する円周角は等しいから

$$\theta = \angle ABQ = \angle APQ$$

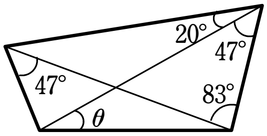
$\triangle APQ$ の内角の和は 180° であるから

$$40° + \theta + (90° + 29°) = 180°$$

したがって　$\theta = 21°$　答

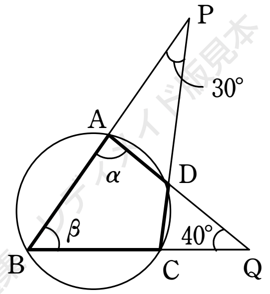


類題 右の図において，角 θ を求めよ。



２６　円に内接する四角形　数学Ａ

★★
26 《例題》 右の図で，四角形 ABCD は円に内接している。角 α，β を求めよ。



解答 △ABQ の内角の和は 180° であるから

$$\alpha+\beta+40^\circ=180^\circ \quad \cdots\cdots ①$$

また，四角形 ABCD は円に内接しているから

$$\angle DCB=180^\circ-\alpha \qquad \leftarrow \text{対角の和が } 180^\circ$$

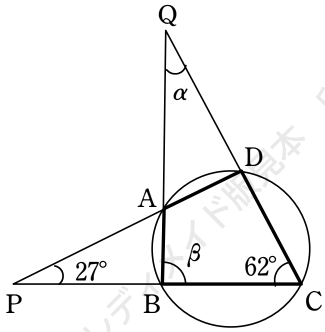
△PBC の内角の和は 180° であるから

$$30^\circ+\beta+(180^\circ-\alpha)=180^\circ$$

すなわち　$-\alpha+\beta=-30^\circ$ ……②

①，② を連立して解くと　$\alpha=85^\circ$，$\beta=55^\circ$　答

類題 右の図で，四角形 ABCD は円に内接している。角 α，β を求めよ。

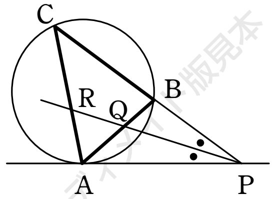


（　月　日）

得　点
／50

２７　接線と弦の作る角　数学Ａ

★★
27 《例題》 右の図のように，△ABC とその外接円があり，A を通る円の接線と辺 CB を延長した直線の交点を P とする。さらに，∠APB の二等分線が辺 AB，AC と交わる点をそれぞれ Q，R とするとき，AQ＝AR であることを証明せよ。



解答 接線と弦の作る角により　∠BAP＝∠BCA

∠APB の二等分線より　∠CPR＝∠APQ

△APQ において　∠AQR＝∠QAP＋∠APQ　← 内角と外角の関係

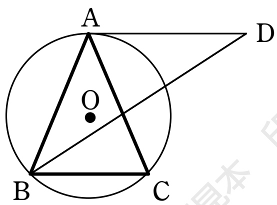
△CPR において　∠ARQ＝∠BCR＋∠CPR　← 内角と外角の関係

以上により　∠AQR＝∠ARQ

よって，△AQR は二等辺三角形となる。

したがって　AQ＝AR　終

類 題　AB＝AC の二等辺三角形 ABC とその外接円 O がある。右の図のように，∠B の二等分線と点 A における円 O の接線との交点を D とするとき，AB＝AD であることを証明せよ。



28　方べきの定理　数学A

★★
28 《例題》 (1)　点 O を中心とする半径 2 の円の内部に点 P がある。P を通る円 O の弦 AB について，$PA \cdot PB=1$ であるとき，線分 OP の長さを求めよ。

(2)　1 つの円において，2 つの弦 AB，CD が点 P で交わるとき，$PA=PC$ ならば $AB=CD$ であることを証明せよ。

解答 (1)　P を通る直径を CD とすると，方べきの定理により

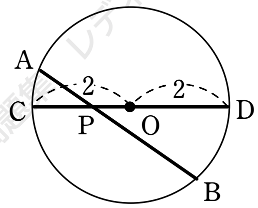
$$PC \cdot PD = PA \cdot PB = 1$$

よって　$(OC-OP)(OD+OP)=1$

すなわち　$(2-OP)(2+OP)=1$

ゆえに　$2^2-OP^2=1$　　よって　$OP^2=3$

$OP>0$ であるから　$OP=\sqrt{3}$　答

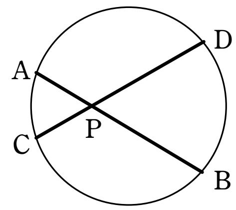


(2)　方べきの定理により　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$PA=PC$ であるから　$PB=PD$

よって　$AB=AP+PB$

$=PC+PD=CD$　終



類題 (1)　点 O を中心とする半径 3 の円の内部に点 P がある。P を通る円 O の弦 AB について，$PA \cdot PB=2$ であるとき，線分 OP の長さを求めよ。(30 点)

(2)　2 点 A，B で交わる 2 円において，線分 AB の延長上にある点 C から，2 円それぞれに引いた接線の接点を P，Q とする。このとき，$CP=CQ$ であることを証明せよ。(20 点)

（　月　日）

得　点
／50

２９　連続する整数の積の性質　数学Ａ

★★
29 《例題》 n は整数とする。$2n^3-3n^2+n$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

解答 $2n^3-3n^2+n=n(n-1)(2n-1)=n(n-1)\{(n-2)+(n+1)\}$
$=(n-2)(n-1)n+(n-1)n(n+1)$

$(n-2)(n-1)n$，$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから，どちらも 6 の倍数である。

よって，$2n^3-3n^2+n$ は 6 の倍数である。 終

類 題 (1)　m，n を自然数とする。$m^3+2n^3+3n^2-m+n$ が 6 で割り切れることを証明せよ。

(25 点)　〔同志社大〕

(2)　n が 3 以上の奇数のとき，n^3-n は 24 で割り切れることを示せ。(25 点)　〔宮崎大〕

（　月　日）

得　点
／50

３０　文字式と最大公約数　　数学Ａ

★★
30 《例題》 (1)　n が自然数のとき，$3n+1$ と $3n+2$ は互いに素であることを示せ。

(2)　$9n+3$ と $2n+3$ の最大公約数が 7 になるような 2 桁の自然数 n をすべて求めよ。

解答 (1)　$3n+2=(3n+1)\cdot 1+1$，$3n+1=1\cdot(3n+1)+0$

よって，$3n+1$ と $3n+2$ の最大公約数は 1 である。

したがって，$3n+1$ と $3n+2$ は互いに素である。 終

(2)　$9n+3=(2n+3)\cdot 4+n-9$，$2n+3=(n-9)\cdot 2+21$

よって，$9n+3$ と $2n+3$ の最大公約数は，$n-9$ と 21 の最大公約数に等しい。

ゆえに，$n-9$ と 21 の最大公約数は 7 であり，$21=3\cdot 7$ であるから，$n-9$ は 7 の倍数であるが，3 の倍数ではない。

また，$1\leqq n-9\leqq 90$ であるから　　$n-9=7$，14，28，35，49，56，70，77

よって　　$n=16$，23，37，44，58，65，79，86 答

類 題 (1)　n が自然数のとき，$7n+10$ と $2n+3$ は互いに素であることを示せ。(25 点)

(2)　$7n+6$ と $3n+4$ の最大公約数が 5 になるような 2 桁の自然数 n をすべて求めよ。(25 点)

３１　分数方程式の自然数解	数学Ａ	得点 /50

★★
31 《例題》　等式 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

解答　等式の両辺に $2xy$ を掛けて　$4y+2x=xy$

変形すると　$(x-4)(y-2)=8$　……①

x，y は自然数であるから，$x-4$，$y-2$ は整数で　$x-4 \geqq -3$，$y-2 \geqq -1$

よって，① から　$(x-4,\ y-2)=(1,\ 8),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (8,\ 1)$

したがって　$(x,\ y)=(5,\ 10),\ (6,\ 6),\ (8,\ 4),\ (12,\ 3)$　答

類題 (1)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{3}$ かつ $a<b$ を満たす正の整数 a，b を求めよ。(25 点)　〔千葉工大〕

(2)　x，y を自然数とするとき，$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ となる x，y の値の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。(25 点)

〔同志社大〕

（　月　日）

得　点
／50

３２　n 進法の数と自然数の決定　数学Ａ

★★
32 《例題》 自然数 N を 5 進法と 7 進法で表すと，ともに 2 桁の数であり，各位の数の並びが逆になるという。N を 10 進法で表せ。

解答 N が 5 進法で $ab_{(5)}$ と表されるとすると，7 進法では $ba_{(7)}$ となる。

底について $5<7$ であるから　$1 \leqq a \leqq 4$，$1 \leqq b \leqq 4$　…… ①

N を 10 進法で表すと

$$N=ab_{(5)}=a \cdot 5^1+b \cdot 5^0=5a+b$$

$$N=ba_{(7)}=b \cdot 7^1+a \cdot 7^0=a+7b$$

よって　$5a+b=a+7b$　ゆえに　$2a=3b$

これと ① を満たす整数 a，b は　$a=3$，$b=2$

したがって　$N=5 \cdot 3+2=17$　答

類題　自然数 N を 5 進法と 7 進法で表すと，ともに 3 桁の数であり，各位の数の並びが逆になるという。N を 10 進法で表せ。