重要事項

●各項目の中で，重要と思われる事柄（定理，公式など）を掲載しました。

1．多項式の計算，展開の公式

◆計算法則

① 交換法則　$A+B=B+A$，　$AB=BA$

② 結合法則　$(A+B)+C=A+(B+C)$

$(AB)C=A(BC)$

③ 分配法則　$A(B+C)=AB+AC$

$(A+B)C=AC+BC$

◆指数法則　m，n は正の整数とする。

① $a^m a^n=a^{m+n}$　　② $(a^m)^n=a^{mn}$

③ $(ab)^n=a^n b^n$　　参考　$a^0=1$

◆2 次式の展開の公式

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

参考　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

◆3 次式の展開の公式

⑤ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⑥ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

参考　$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

注意　3 次式の展開の公式は数学Ⅱの内容であるが，本書では扱うものとする。

◆対称式の変形

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

③ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

④ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$+3abc$

2．因数分解

◆共通因数をくくり出す

$AB+AC=A(B+C)$

◆2 次式の因数分解の公式

① $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

② $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

③ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

④ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

たすきがけ

$$\begin{array}{ccccc} a & \diagdown\!\!\!\!\diagup & b & \longrightarrow & bc \\ c & & d & \longrightarrow & ad \\ \hline ac & & bd & & ad+bc \end{array}$$

◆3 次式の因数分解の公式

⑤ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

⑥ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

注意　3 次式の因数分解は数学Ⅱの内容であるが，本書では扱うものとする。

◆因数分解の要領

- 共通因数をくくり出す。
- 次数の最も低い文字について整理
- 適当におき換える。
- 項の組み合わせを工夫する。

⇒ 公式を適用。

3．根号を含む式の計算

◆平方根の性質　$a \geqq 0$，$b \geqq 0$，$k>0$ とする。

① $(\sqrt{a})^2=a$，　$(-\sqrt{a})^2=a$，　$\sqrt{a} \geqq 0$

② $a \geqq 0$ のとき　$\sqrt{a^2}=a$

$a<0$ のとき　$\sqrt{a^2}=-a$

すなわち　$\sqrt{a^2}=|a|$

③ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　$(b \neq 0)$

$\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

◆分母の有理化

分母が $k\sqrt{a}$ の形 $\longrightarrow$ 分母・分子に $\sqrt{a}$ を掛ける。

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ の形 $\longrightarrow$ 分母・分子に $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ を掛ける。

$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ の形 $\longrightarrow$ 分母・分子に $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を掛ける。

◆2 重根号

$a>0$，$b>0$ のとき　$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$a>b>0$　のとき　$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

4．1 次不等式

◆不等式の性質

① $A<B$ ならば　$A+C<B+C$，　$A-C<B-C$

② $A<B$，$C>0$ ならば　$AC<BC$，　$\dfrac{A}{C}<\dfrac{B}{C}$

③ $A<B$，$C<0$ ならば　$AC>BC$，　$\dfrac{A}{C}>\dfrac{B}{C}$

◆1 次不等式の解法

① **1 次不等式の解法の手順**

[1] 文字を含む項を左辺に，定数項を右辺に移項する。

[2] $ax>b$ $(ax<b,\ ax \geqq b,\ ax \leqq b)$ の形に整理する。

[3] a の符号に注意して両辺を a で割る。

$a>0$ なら不等号の向きはそのまま

$a<0$ なら不等号の向きは変わる

② **1 次不等式 $ax>b$ の解**

$a>0$ ならば　$x>\dfrac{b}{a}$，　$a<0$ ならば　$x<\dfrac{b}{a}$

◆連立不等式の解法の手順

[1] それぞれの不等式を解く。

[2] それぞれの解の共通範囲を求める。その際，数直線を使うと考えやすい。

◆文章題（不等式）の解法の手順

文字の選定 $\longrightarrow$ 不等式を作る $\longrightarrow$ 不等式を解く

$\longrightarrow$ 解の確認（問題に適するか）

5．絶対値と方程式・不等式

① **絶対値**

$a \geqq 0$ のとき　$|a|=a$，　$a<0$ のとき　$|a|=-a$

② **絶対値を含む方程式・不等式**

$c>0$ のとき，方程式 $|x|=c$ の解は　$x=\pm c$

不等式 $|x|<c$ の解は　$-c<x<c$

不等式 $|x|>c$ の解は　$x<-c$，$c<x$

③ **絶対値と場合分け**

$|x-a|$ について，

$x\geqq a$ のとき　$|x-a|=x-a$

$x<a$ のとき　$|x-a|=-(x-a)$

6．集　合

◆集合とその表し方

① ｛　｝の中に要素を書き並べて表す。

例　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

$B=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 100\}$

$C=\{5,\ 10,\ 15,\ \cdots\cdots\}$

注意　集合の要素の個数が多かったり，無限に多くの要素がある場合には，省略記号 …… を用いて表すことがある。

② 要素が満たすべき条件を書いて表す。

例　$A=\{x\mid x$ は 8 の正の約数$\}$

$B=\{x\mid 1\leqq x\leqq 9,\ x$ は奇数$\}$

$C=\{2n-1\mid 1\leqq n\leqq 5,\ n$ は整数$\}$

◆集合の要素，包含関係

① $x\in A$（x は A に**属する**）　x は集合 A の要素である。

$x\notin A$　　x は集合 A の要素でない。

② $A\subset B$（A は B の**部分集合**）

・集合 A のすべての要素が集合 B の要素でもある。

・「$x\in A$ ならば $x\in B$」が成り立つ。

③ $A=B$（A と B は**等しい**）

・集合 A と B の要素が完全に一致している。

・「$A\subset B$ かつ $B\subset A$」が成り立つ。

◆空集合（$\varnothing$）　要素が 1 つもない集合

◆共通部分と和集合

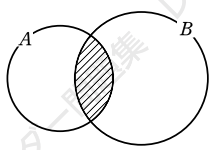
① $A\cap B$（A と B の**共通部分**）

集合 A，B のどちらにも属する要素全体の集合

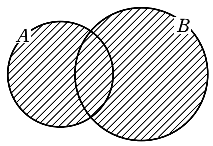
② $A\cup B$（A と B の**和集合**）

集合 A，B の少なくとも一方に属する要素全体の集合

$\boxed{A\cap B}$



$\boxed{A\cup B}$



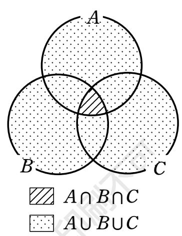
◆3 つの集合の共通部分と和集合

① $A\cap B\cap C$　（**共通部分**）

集合 A，B，C のすべてに属する要素全体の集合

② $A\cup B\cup C$　（**和集合**）

集合 A，B，C の少なくとも 1 つに属する要素全体の集合



◆補集合（$\overline{A}$）

全体集合 U の部分集合 A に対して，A に属さない U の要素全体の集合

◆ド・モルガンの法則

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

7．命題と条件

◆命題

正しいか正しくないか明確に決まる事柄。

正しいとき **真**，正しくないとき **偽** であるという。

◆命題の真偽

① 真の場合は証明する。偽の場合は反例を 1 つ示す。

② 条件 p を満たすもの全体の集合を P，条件 q を満たすもの全体の集合を Q とするとき

$p\Longrightarrow q$ が真であることと $P\subset Q$ であることは同じ

◆「かつ」，「または」の否定

$\overline{p\ \text{かつ}\ q}\iff\overline{p}\ \text{または}\ \overline{q}$

$\overline{p\ \text{または}\ q}\iff\overline{p}\ \text{かつ}\ \overline{q}$

◆「すべての x」，「ある x」の否定

「すべての x について p」の否定は

ある x について　$\overline{p}$

「ある x について p」の否定は

すべての x について　$\overline{p}$

◆必要条件・十分条件

① 命題 $p\Longrightarrow q$ が真であるとき

p は q であるための **十分条件**

q は p であるための **必要条件**

② $p\Longrightarrow q$ と $q\Longrightarrow p$ がともに真であるとき，すなわち $p\iff q$ が成り立つとき

p は q（q は p）であるための **必要十分条件**。

p と q は互いに **同値**。

8．命題と証明

◆命題の逆・対偶・裏

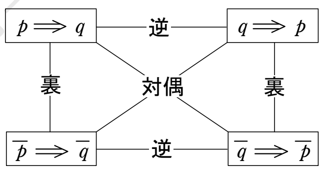
① 命題 $p\Longrightarrow q$ に対して

逆：$q\Longrightarrow p$　　対偶：$\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$

裏：$\overline{p}\Longrightarrow\overline{q}$

② 真である命題の逆は，必ずしも真ではない。

命題とその対偶の真偽は一致する。



◆命題と証明

① **対偶の利用**　命題 $p\Longrightarrow q$ を証明するには，その対偶 $\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$ を証明してもよい。

② **背理法**　命題 $p\Longrightarrow q$ が成り立たないと仮定して，矛盾を導き，それによって命題が成り立つことを示す証明方法。

9．関数とグラフ

◆定義域・値域　関数 $y=f(x)$ において

定義域 ……　変数 x のとる値の範囲

値　域 ……　定義域の x の値に対応して，y がとる値の範囲

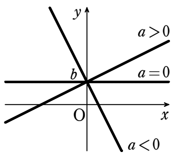
◆ **1 次関数 $y=ax+b$ のグラフ**

傾きが a で，y 軸上の切片（y 切片）が b の直線

$a>0$ なら　右上がり

$a<0$ なら　右下がり

$a=0$ なら　x 軸に平行



◆ **関数 $y=ax+b$ $(p\leqq x\leqq q)$ の最大・最小**

$a>0$ なら　$x=q$ で最大，$x=p$ で最小

$a<0$ なら　$x=p$ で最大，$x=q$ で最小

$a=0$ のとき，$y=b$ $(p\leqq x\leqq q)$ となり，一定の値をとる。

◆ **絶対値を含む関数 $y=|f(x)|$**

$f(x)\geqq 0$ のとき　$y=f(x)$

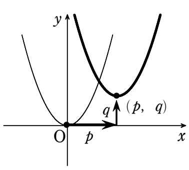
$f(x)<0$ のとき　$y=-f(x)$

10. 2 次関数のグラフ

◆ **$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ**

① $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線。

② 軸の方程式は　$x=p$
頂点の座標は　$(p,\ q)$



③ $a>0$ のとき下に凸，$a<0$ のとき上に凸

◆ **$y=ax^2+bx+c$ のグラフ**

まず，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形する（平方完成）。

◆ **平方完成のやり方**

x^2 の係数でくくり，$(x$ の係数の半分$)^2$ を加えて引く。

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

◆**平行移動**　x 軸方向に p，y 軸方向に q

点 $(a,\ b)\longrightarrow(a+p,\ b+q)$

グラフ $y=f(x)\longrightarrow y=f(x-p)+q$

◆**対称移動**　点 $(a,\ b)$，グラフ $y=f(x)$ に対して

x 軸	y 軸	原点
$(a,\ -b)$	$(-a,\ b)$	$(-a,\ -b)$
$y=-f(x)$	$y=f(-x)$	$y=-f(-x)$

11. 2 次関数の最大・最小

◆ **2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の最大・最小**

$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形する。

$a>0$ のとき　$x=p$ で最小値 q をとる。最大値はない。

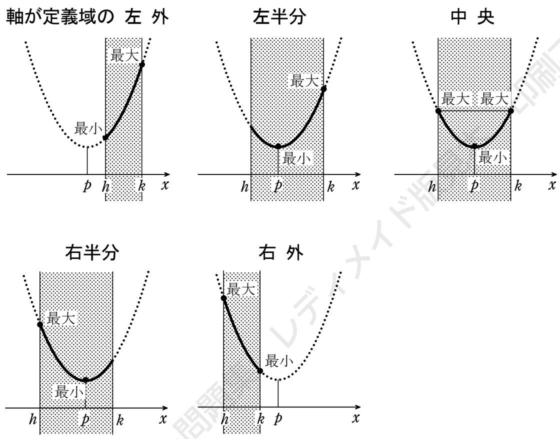
$a<0$ のとき　$x=p$ で最大値 q をとる。最小値はない。

◆ **関数 $y=a(x-p)^2+q$ $(h\leqq x\leqq k)$ の最大・最小**

軸 $x=p$ と定義域 $h\leqq x\leqq k$ の位置によって決まる。

最大値・最小値は $x=p$，$x=h$，$x=k$ のいずれかでとる。

$a>0$〔下に凸〕のとき，次の 5 つの場合に分かれる。



◆ **文章題（最大・最小）の解法の手順**

[1]　変数を適当に選び，求める量の関数を作る。

[2]　定義域に注意して，その関数の最大値，最小値を調べる。

12. 2 次関数の決定

◆ **2 次関数の表し方**　与えられた条件が

① 放物線の軸や頂点，最大値・最小値
$\longrightarrow$ $y=a(x-p)^2+q$　とおく。

② グラフが通る 3 点
$\longrightarrow$ $y=ax^2+bx+c$　とおく。

③ グラフが x 軸と 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わる
$\longrightarrow$ $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$　とおく。

④ グラフが x 軸と接する
$\longrightarrow$ $y=a(x-\alpha)^2$　とおく。

⑤ 放物線 $y=ax^2+bx+c$ を平行移動
$\longrightarrow$ $y=ax^2+b'x+c'$　とおく。
（2 次の係数は変わらず）

◆ **連立 3 元 1 次方程式の解法**

[1]　1 文字を消去して，残りの 2 文字の連立方程式を導く。

[2]　2 文字の連立方程式を解く。

[3]　残りの 1 文字の値を求める。

13. 2 次方程式

◆**2 次方程式の解き方**

① 因数分解の利用
$AB=0$　ならば　$A=0$ または $B=0$

② 平方根の考えの利用
$a>0$ のとき，$x^2=a$ の解は　$x=\pm\sqrt{a}$

③ **解の公式** の利用

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

◆2 次方程式の解の判別

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，$D=b^2-4ac$ とすると

$D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ
$D=0 \iff$ 重解をもつ
$D<0 \iff$ 実数解をもたない

重解をもつとき，その重解は　$x=-\dfrac{b}{2a}$

14. 2 次関数のグラフと x 軸の位置関係

◆ x 軸との共有点の座標

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解である。

◆ x 軸との位置関係

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の係数について，$D=b^2-4ac$ とすると

$D>0 \iff$ 異なる 2 点で交わる
$D=0 \iff$ 1 点で接する
$D<0 \iff$ 共有点をもたない

1 点で接するとき，接点の x 座標は　$x=-\dfrac{b}{2a}$

◆放物線と直線の共有点

放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ の共有点の x 座標は，2 式から y を消去してできる方程式

$$ax^2+bx+c=mx+n$$

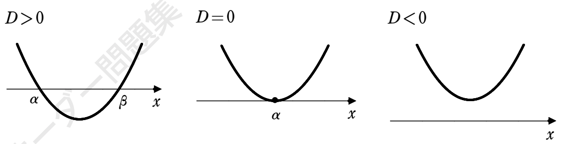
の実数解である。

15. 2 次不等式

◆ 2 次不等式の解法の手順

[1]　$ax^2+bx+c>0$（$\geqq 0$，<0，$\leqq 0$）の形に整理する。
この際，x^2 の係数が負である場合は，両辺に -1 を掛けて正にしておく。

[2]　$D=b^2-4ac$ の符号を調べる。
$D>0$ のとき　$ax^2+bx+c=0$ の 2 解 α，β を求めて，グラフ利用。
$D=0$ のとき　$ax^2+bx+c=0$ の重解 α を求めて，グラフ利用。
$D<0$ のとき　$y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸より上側にあることに着目。



◆ 2 次不等式の解　$\alpha<\beta$ とする。

①　$(x-\alpha)(x-\beta)>0$ の解は　$x<\alpha$，$\beta<x$
　　$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$

②　$(x-\alpha)^2>0$ の解は　α 以外のすべての実数
　　$(x-\alpha)^2\geqq 0$ の解は　すべての実数
　　$(x-\alpha)^2<0$ の解は　ない
　　$(x-\alpha)^2\leqq 0$ の解は　$x=\alpha$

◆ 2 次不等式が常に成り立つ条件

①　2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ がすべての実数 x で成り立つ　$\iff$ $a>0$ かつ $D=b^2-4ac<0$

②　2 次不等式 $ax^2+bx+c<0$ がすべての実数 x で成り立つ　$\iff$ $a<0$ かつ $D=b^2-4ac<0$

◆ 2 次方程式の解と数 k の大小

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ とする。

放物線 $y=f(x)$ の軸を直線 $x=p$ とし，$D=b^2-4ac$ とする。

2 次方程式 $f(x)=0$ の解 α，β $(\alpha\leqq\beta)$ について

①　$\alpha>k$，$\beta>k$（ともに k より大）
　　$\iff$ $D\geqq 0$，軸：$p>k$，$f(k)>0$

②　$\alpha<k$，$\beta<k$（ともに k より小）
　　$\iff$ $D\geqq 0$，軸：$p<k$，$f(k)>0$

③　$\alpha<k<\beta$（k は α と β の間）
　　$\iff$ $f(k)<0$