第２節　２次関数の値の変化

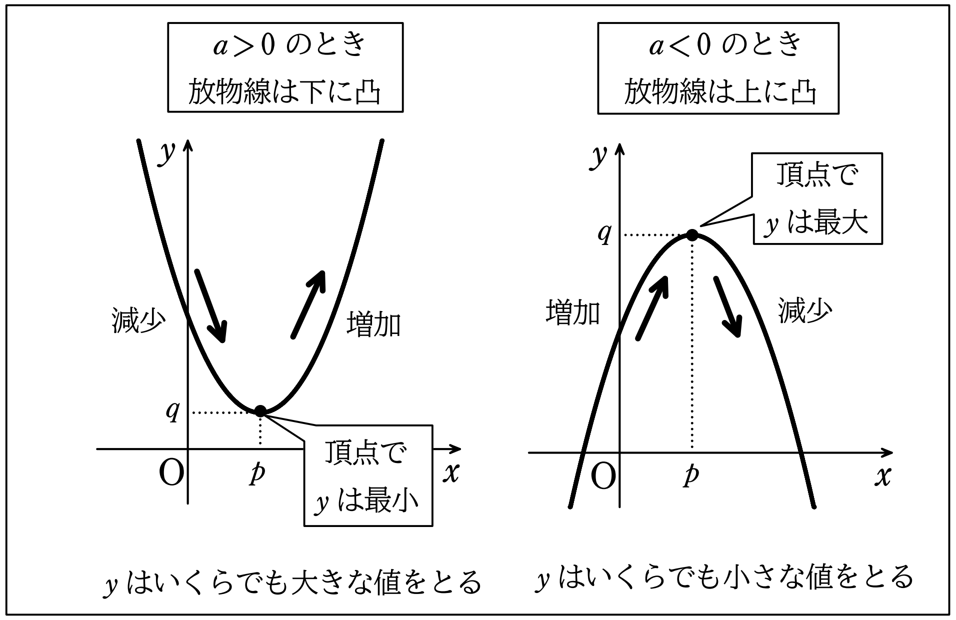
３　２次関数の最大・最小

関数のグラフを利用すると，関数の値の変化の様子を知ることができる。
ここでは，2 次関数の値の変化を調べよう。

A　２次関数の最大・最小

2 次関数 $y=ax^2$ の値の変化については，84 ページで述べた。

2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の値の変化についても，a の値が正か負かによって次のような 2 つの場合がある。



したがって，次のことがいえる。

２次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小

$a>0$ のとき，$\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる。最大値は $\boxed{}$ 。

$a<0$ のとき，$\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとる。最小値は $\boxed{}$ 。

練習 14　次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=2(x-3)^2+4$　　(2)　$y=-2(x+1)^2-3$

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の最大値，最小値を調べるには，2次式を平方完成して $y=a(x-p)^2+q$ の形にすればよい。

←2次式の平方完成については，90，91ページを参照。

例題 4　次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+3$　　　(2)　$y=-2x^2-4x$

解答　(1)　$y=x^2-4x+3$ を変形すると

$y=\boxed{}$

よって，y は $\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる。

最大値は $\boxed{}$ 。

←放物線は下に凸で，頂点は点(2，−1)

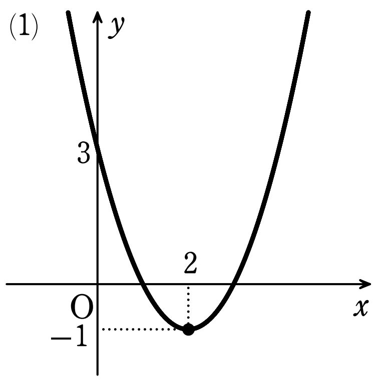
(2)　$y=-2x^2-4x$ を変形すると

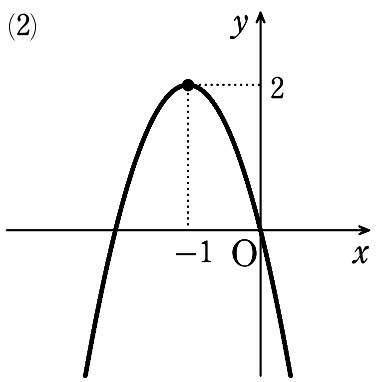
$y=\boxed{}$

よって，y は $\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとる。

最小値は $\boxed{}$ 。

←放物線は上に凸で，頂点は点(−1，2)

(1)


(2)


練習 15　次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-6x+5$

(2)　$y=-x^2-4x+2$

(3)　$y=2x^2+4x-1$

(4)　$y=-2x^2+6x$

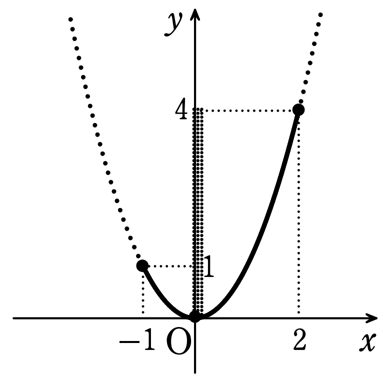
深める　$x=1$ で最小値をとる 2 次関数を 1 つ考えてみよう。

B　2 次関数の定義域と最大・最小

これまでは 2 次関数の定義域が実数全体であったが，関数の定義域に制限のある場合についても，最大値，最小値を調べてみよう。

例 8　関数 $y=x^2$（$-1 \leqq x \leqq 2$）の値域と最大値，最小値

この関数のグラフは，右の図の実線部分である*。



よって，値域は $\boxed{}$

である。また，y は

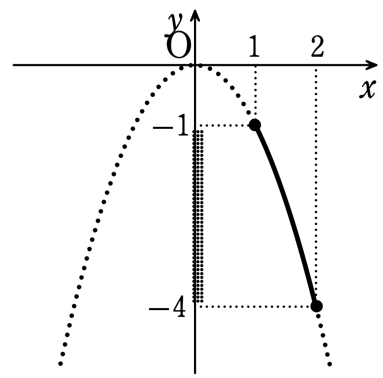
$\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとり，

$\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる。

終

例 9　関数 $y=-x^2$（$1 \leqq x \leqq 2$）の値域と最大値，最小値

この関数のグラフは，右の図の実線部分である。



よって，値域は $\boxed{}$

である。また，y は

$\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとり，

$\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる。

終

＊関数 $y=x^2$ のグラフのうち，$-1 \leqq x \leqq 2$ に対応する部分である。

練習 16　次の関数の値域と最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=2x^2$ $(-2\leqq x\leqq -1)$

(2)　$y=-2x^2$ $(-2\leqq x\leqq 1)$

Point　定義域に制限のある2次関数の最大値，最小値を考える場合は，放物線の $\boxed{\quad}$ と $\boxed{\quad}$ の関係に着目するとよい。例8と例9では，
放物線の軸はどちらも直線 $x=0$ であり，定義域と次のような関係がある。
例8 → 0が定義域に含まれる　　例9 → 0が定義域に含まれない

例題 5　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

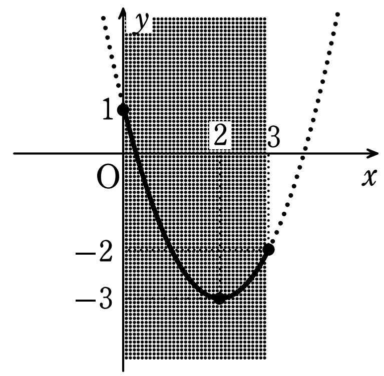
(1)　$y=x^2-4x+1$　$(0\leqq x\leqq 3)$

(2)　$y=-2x^2+12x-10$　$(1\leqq x\leqq 2)$

解答　(1)　$y=x^2-4x+1$ を変形すると

$\boxed{\quad}$

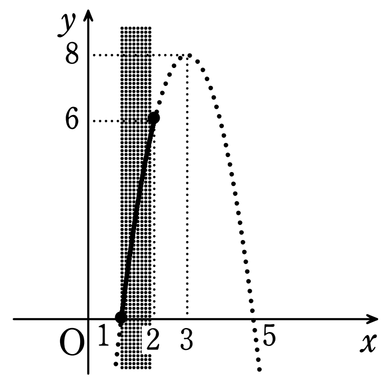
$0\leqq x\leqq 3$ におけるグラフは，
右の図の実線部分である。
よって，y は
$\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$ をとり，
$\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。



(2)　$y=-2x^2+12x-10$ を変形すると

$\boxed{\quad}$

$1\leqq x\leqq 2$ におけるグラフは，
右の図の実線部分である。
よって，y は
$\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$ をとり，
$\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。



練習 17　関数 $y=x^2-4x+1$ の定義域として次の範囲をとるとき，各場合について，最大値と最小値を求めよ。

(1)　$-2 \leqq x \leqq 1$

(2)　$1 \leqq x \leqq 4$

(3)　$4 \leqq x \leqq 5$

(4)　$0 \leqq x \leqq 4$

練習 18 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=x^2-2x+3$ $(0\leqq x\leqq 3)$

(2) $y=-x^2+4x-3$ $(1\leqq x\leqq 4)$

(3) $y=3x^2+6x-1$ $(1\leqq x\leqq 3)$

(4) $y=-2x^2+14x$ $(0\leqq x\leqq 7)$

応用例題2

次の条件を満たすように，定数 c の値を定めよ。

(1)　関数 $y=x^2-4x+c$ $(1\leqq x\leqq 5)$ の最大値が 8 である。

(2)　関数 $y=-x^2-2x+c$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値が -3 である。

考え方　(1)　下に凸の放物線では，軸から遠いほど y の値は大きい。

(2)　上に凸の放物線では，軸から遠いほど y の値は小さい。

解答　(1)　$y=x^2-4x+c$ を変形すると

$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$

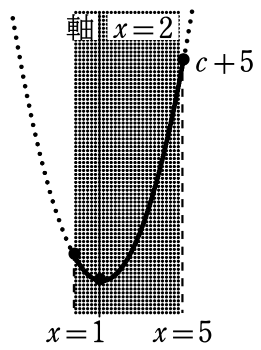
関数 $y=x^2-4x+c$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は $\boxed{\qquad\qquad}$ である。

定義域は $1\leqq x\leqq 5$ であるから，y は

$\boxed{\qquad}$ で最大値をとる。

$\boxed{\qquad}$ のとき　$y=\boxed{\quad}^2-4\cdot\boxed{\quad}+c=\boxed{\qquad}$

$\boxed{\qquad}=8$　より　$c=\boxed{\quad}$



(2)　$y=-x^2-2x+c$ を変形すると

$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$

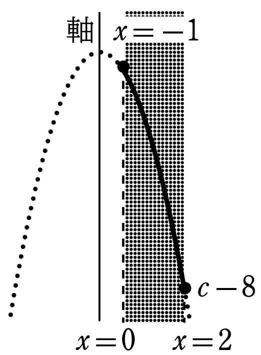
関数 $y=-x^2-2x+c$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は $\boxed{\qquad\qquad}$ である。

定義域は $0\leqq x\leqq 2$ であるから，y は

$\boxed{\qquad}$ で最小値をとる。

$\boxed{\qquad}$ のとき　$y=-\boxed{\quad}^2-2\cdot\boxed{\quad}+c=\boxed{\qquad}$

$\boxed{\qquad}=-3$　より　$c=\boxed{\quad}$



練習19　次の条件を満たすように，定数 c の値を定めよ。

(1)　関数 $y=x^2-2x+c$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ の最大値が 5 である。

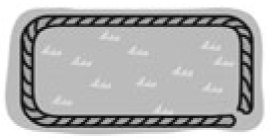
(2)　関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -7 である。

C 最大・最小の応用

2次関数を使って解決できる問題について，考えてみよう。

応用例題3

長さ 16 m のロープで長方形の囲いを作る。この長方形の面積の最大値を求めよ。



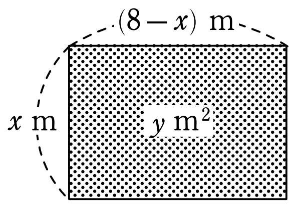
考え方　長方形の縦の長さと横の長さの和は 8 m である。縦の長さを x m，面積を $y\ \mathrm{m}^2$ とし，y を x で表す。x の値の範囲にも注意する。

解答　長方形の縦の長さを x m とすると，

横の長さは $\boxed{\quad\quad}$ m である。

$x>0$ かつ $\boxed{\quad\quad}>0$ から　←縦と横の長さは正の数である。

$\boxed{\quad\quad}$ ……①

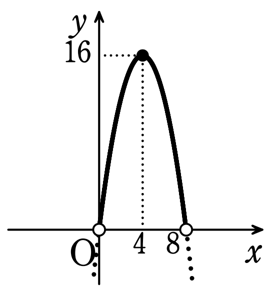


長方形の面積を $y\ \mathrm{m}^2$ とすると

$y=x\left(\boxed{\quad\quad}\right)$

$=\boxed{\quad}x^2+\boxed{\quad}x$

$=-\left(x-\boxed{\quad}\right)^2+\boxed{\quad}$



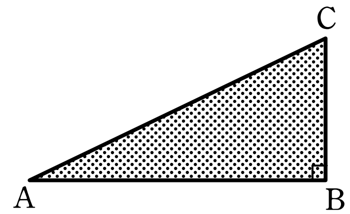
よって，① の範囲において，y は

$\boxed{\quad\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad\quad}$ をとる。

したがって，縦の長さが $\boxed{\quad}$ m のとき長方形の面積は最大で，その最大値は $\boxed{\quad}$ m^2 である。

補足　$x=4$ のとき，囲いは縦 4 m，横 4 m の正方形となる。

練習 20　直角三角形 ABC において，直角をはさむ 2 辺 AB，BC の長さの和が 10 cm であるとする。このような三角形の面積の最大値を求めよ。



研究　定義域が変化するときの関数の最大値・最小値

関数の定義域が変化するとき，その関数の最小値を調べてみよう。

例1　a を正の定数とするとき，次の関数の最小値を求める。

$$y=x^2-4x+1 \quad (0 \leqq x \leqq a)$$

この関数の式を変形すると □ $(0 \leqq x \leqq a)$

関数 $y=x^2-4x+1$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は □

である。定義域 $0 \leqq x \leqq a$ が □ を含まない場合と，□ を

含む場合とで分けて考える。

[1]　$0<a<$ □ のとき

この関数のグラフは図[1]の実線部分である。

よって，y は □ で最小値 □ をとる。

[2]　□ $\leqq a$ のとき

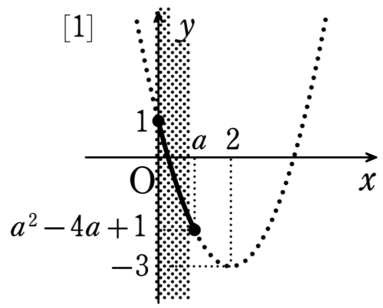
この関数のグラフは図[2]の実線部分である。

よって，y は □ で最小値 □ をとる。

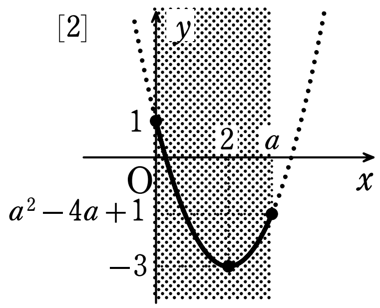
[1]，[2]から　$0<a<$ □ のとき　□ で最小値 □

□ $\leqq a$ のとき　□ で最小値 □

[1]



[2]



終

練習1　a は正の定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$y=-x^2+2x+1 \quad (0 \leqq x \leqq a)$$

4　2 次関数の決定

ここでは，与えられた条件を満たす 2 次関数を求めてみよう。

A　放物線の頂点や軸から関数を決定

まず，$y=a(x-p)^2+q$ の形が利用できる場合について調べよう。

例題 6　次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(2,\ 5)$ で，点 $(-1,\ -4)$ を通る。

(2)　軸が直線 $x=2$ で，2 点 $(1,\ -4)$，$(4,\ 5)$ を通る。

解答　(1)　頂点が点 $(2,\ 5)$ であるから，この 2 次関数は

$\boxed{}$

の形に表される。グラフが点 $(-1,\ -4)$ を通るから　$-4=a(-1-2)^2+5$

← $y=a(x-2)^2+5$ に $x=-1$，$y=-4$ を代入する。

よって　$a=\boxed{}$

したがって，求める 2 次関数は　$\boxed{}$

(2)　軸が直線 $x=2$ であるから，この 2 次関数は

$\boxed{}$

の形に表される。グラフが

点 $(1,\ -4)$ を通るから　$-4=a(1-2)^2+q$

点 $(4,\ 5)$ を通るから　$5=a(4-2)^2+q$

よって　$\boxed{}$，$\boxed{}$

これを解くと　$a=\boxed{}$，$q=\boxed{}$

したがって，求める 2 次関数は　$\boxed{}$

練習 21　次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(1,\ -3)$ で，点 $(3,\ 5)$ を通る。

(2)　軸が直線 $x=-1$ で，2 点 $(0,\ 5)$，$(2,\ -11)$ を通る。

B 放物線上の 3 点から関数を決定

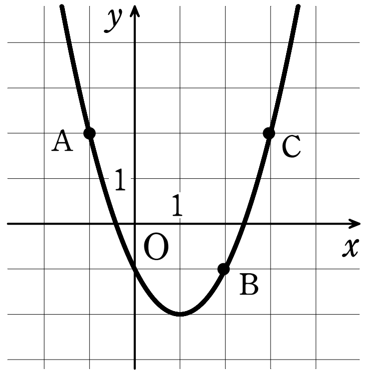
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが 3 点 A $(-1,\ 2)$，B $(2,\ -1)$，C $(3,\ 2)$ を通るとする。このとき，次の等式が成り立つ。

点 A を通るから　$2=a(-1)^2+b(-1)+c$

点 B を通るから　$-1=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$

点 C を通るから　$2=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c$

そこで，これらを同時に成り立たせる a，b，c の値を求めてみよう。



例 10　次の 3 つの等式を同時に満たす a，b，c の値を求める。

$$\begin{cases} a-\ b+c=2 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=-1 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

① と ② を用いて c を消去する。

②−① から　$\boxed{\qquad\qquad}$

すなわち　$\boxed{\qquad\qquad}$ ……④

②−① の計算

$$\begin{array}{rr} & 4a+2b+c=-1 \\ -) & a-\ b+c=\ \ 2 \\ \hline & 3a+3b\quad\ =-3 \end{array}$$

① と ③ を用いて c を消去する。

③−① から　$\boxed{\qquad\qquad}$

すなわち　$\boxed{\qquad\qquad}$ ……⑤

③−① の計算

$$\begin{array}{rr} & 9a+3b+c=2 \\ -) & a-\ b+c=2 \\ \hline & 8a+4b\quad\ =0 \end{array}$$

④ と ⑤ を連立させた方程式を解くと

$a=\boxed{\quad}$，$b=\boxed{\quad}$

これらを ① に代入すると　$c=\boxed{\quad}$

よって　$a=\boxed{\quad}$，$b=\boxed{\quad}$，$c=\boxed{\quad}$　終

例 10 から，グラフが 3 点 A $(-1,\ 2)$，B $(2,\ -1)$，C $(3,\ 2)$ を通る 2 次関数は $y=\boxed{\qquad\qquad}$ であることがわかる。

例 10 のような，3 文字を含む 1 次方程式を組み合わせた連立方程式を $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ という。これの解き方は次のようになる。

> **連立 3 元 1 次方程式の解き方**
> ①　1 文字を消去して，残り 2 文字の連立方程式を導く。
> ②　2 文字の連立方程式を解く。
> ③　残りの 1 文字の値を求める。

練習 22　連立 3 元 1 次方程式 $\begin{cases} a-\ b+c=1 \\ 4a-2b+c=-6 \\ 9a+3b+c=9 \end{cases}$ を解け。

例題 7　2 次関数のグラフが 3 点 (1，5)，(2，1)，(3，−7) を通るとき，その 2 次関数を求めよ。

解答　求める 2 次関数を $\boxed{}$ とする。

グラフが 3 点 (1，5)，(2，1)，(3，−7) を通るから

$\boxed{}$ ……①

$\boxed{}$ ……②

$\boxed{}$ ……③

②−① から $\boxed{}$ ……④

③−② から $\boxed{}$ ……⑤

④，⑤ を解くと $a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$

これらを ① に代入すると $c=\boxed{}$

よって，求める 2 次関数は $\boxed{}$

練習 23　2 次関数のグラフが 3 点 (2，−2)，(3，5)，(−1，1) を通るとき，その 2 次関数を求めよ。

Point　2 次関数を決定する問題では，与えられた条件によって，最初に表す 2 次関数の形を使い分ける。
104 ページ 例題 6 → $y=a(x-p)^2+q$　例題 7 → $y=ax^2+bx+c$

補充問題

4　x の 2 次関数 $y=x^2+2mx+m^2-2m+3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この関数の最小値を m の式で表せ。

(2)　この関数の最小値が -1 であるとき，m の値を求めよ。

5　a は定数とする。関数 $y=x^2-2ax+a^2+1$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最小値を，次の場合について，それぞれ求めよ。

(1)　$a<0$

(2)　$0 \leqq a \leqq 2$

(3)　$2<a$

6　次のような 2 次関数を求めよ。

(1)　グラフが 3 点 $(3,\ 0)$，$(-1,\ 0)$，$(2,\ 6)$ を通る。

(2)　グラフの頂点は放物線 $y=2x^2+4x+1$ の頂点と同じであり，y 軸と点 $(0,\ 2)$ で交わる。

(3)　$x=2$ で最大値 8 をとり，$x=1$ で $y=5$ となる。