

第63回 命題と集合

第4章

【学習のテーマ】 命題とその真偽 (教科書 p.139 ~ 141)

【目標】

- ・ 命題とその真偽について理解し、真偽が判断できるようにさせる。
- ・ 偽の命題を作って伝えあう活動を通じて、命題の真偽を判定する方法や反例の見つけ方を身につけさせる。
- ・ 授業を振り返って、命題の真偽を判定する方法を明確にするとともに、それが身についたかどうかははっきりと認識させる。

【授業の流れ】 (習得型)

① 目標の提示 導入	5 分	ワークシートの冒頭に示している「目標」を提示する。 簡単な導入問題に取り組みせ、文章が正しいかどうかの判断がテーマであることを意識させる。
② 学習内容の説明 (一斉学習) 問題を解く (個別学習)	10 分	命題の真偽について [1] を解きながら説明する。反復問題として、[2] に個人で取り組ませる。
③ 復習 学習内容の説明 (一斉学習) 問題を解く (個別学習)	15 分	「復習」に取り組ませる。 命題の真偽と集合の関係について解説し、具体的な真偽の判定について、[3] を解きながら説明する。反復問題として、[4] に個人で取り組ませる。
④ 学習内容の説明 (一斉学習) 問題を解く (個別学習)	10 分	反例と命題の真偽について解説し、具体的な命題の反例について、[5] を解きながら説明する。反復問題として、[6] に個人で取り組ませる。
⑤ 問題を解く (個別学習)	10 分	偽の命題の作成を個人で取り組ませる。
⑥ グループ課題 (グループ学習)	10 分	隣同士で作成した命題を伝えあい、その反例を言い合う。
⑦ 学習内容の説明 (一斉学習) 問題を解く (個別学習)	10 分	否定について解説し、具体的な条件の否定を [8] を解きながら説明する。反復問題として、[9] に個人で取り組ませる。
⑧ 振り返りの記入	5 分	授業での学習内容と、目標が達成できたかを振り返る。
合計	75 分	—

※このワークシートは 1.5 時間分の授業で取り組むことを想定している。

【ワークシート例の説明】

- ① 目標の提示、導入
 - ・ 冒頭に目標「命題が正しいかどうか判断できるようになろう。」を示している。「命題」は生徒にとって初出の用語なので、導入問題を扱った後で「文章が正しいかどうかを判断できるようになろう。」などのように言い換えてもよい。
 - ・ 導入問題として、文章の正誤問題に取り組ませる。「鳥は空を飛ぶ生き物である」を ○ にする生徒がいた場合は、ペンギンなどの例を挙げると、反例の考えに自然につながる。
- ② 学習内容の説明 (一斉学習), 問題を解く (個別学習)
 - ・ 命題とその真偽について簡単に解説する。

- ・ [1]は教科書 p.139 例 5, [2]は練習 5 で構成している。
 - ・ 真偽の判定はいずれも難しくないと思われる。用語の確認程度の扱いとする。
 - ・ $p \Rightarrow q$ の形の命題についてもここで簡単に解説しておく。
- ③ 復習, 学習内容の説明 (一斉学習), 問題を解く (個別学習)
- ・ 復習を通して, 部分集合の内容を思い出させる。
 - ・ 復習の集合を使って, 命題の真偽と部分集合の関連を説明する。命題と集合の関係はここで初出であるため, 集合を考えると命題の真偽を考えることができることをまず理解させることが重要である。
 - ・ [3]の真偽の判定の具体例は, 実数の集合, すなわち数直線を用いて行う。集合をベン図でのみとらえている場合は理解が進まないことも考えられるので注意する。
 - ・ [3]は教科書 p.140 例 6, [4]は練習 6 で構成している。
- ④ 学習内容の説明 (一斉学習), 問題を解く (個別学習)
- ・ 偽である命題と反例について簡単に解説する。特に, 偽であることを証明するには反例を 1 つあげればよいことは, 次のグループ活動につながるので強調しておく。
 - ・ [5]は教科書 p.141 例 7, [6]は練習 7 で構成している。
- ⑤ 問題を解く (個別学習)
- ・ 偽である命題を自由に作らせる。ワークシートの例にあるように, 数学的な題材でもよいし, 数学とは関係ない題材でもよい。数学と関係ない題材の方が, 後のグループ学習が盛り上がるのが期待できる。
 - ・ 「偽であることが自分でわかる命題にしてください」と注意を促しておく, 自ら反例を用意しておくことにもつながるだろう。
- ⑥ グループ課題 (グループ学習)
- ・ 隣同士で, 命題を言い合い, 隣の人の命題の反例を言う活動をさせる。
 - ・ 反例を探せない場合は, そもそも命題が偽ではなく, 反例がないケースも考えられる。反例を探せないのか反例がないのかは, 机間巡視するなどして, その都度生徒同士のやり取りに耳を傾けた方がよい。反例がない場合は, 命題を作った側に「自分が用意した反例はありますか」のように問い掛けて議論の活性化を促したい。
 - ・ 活動が終わったら, 面白いと思った命題や反例を発表させるという活動をしてもよいだろう。反例が見つけにくい命題があれば, クラス全体で考えても面白い。
- ⑦ 学習内容の説明 (一斉学習), 問題を解く (個別学習)
- ・ 否定と補集合の関係について, 図を参照しながら簡単に解説する。
 - ・ [8]は教科書 p.141 例 8, [9]は練習 8 で構成している。

次の文のうち、正しいものには○印を、
正しくないものには×印をつけましょう。

8は偶数である。 …… ☐

$n=3$ ならば、 $n^2+1=7$ である。 …… ☐

鳥は空を飛ぶ生き物である。 …… ☐



▶ 正しいか正しくないかがはっきりと決まる文や式を **命題** といいます。命題が正しいとき、その命題は **真** であるといい、正しくないとき、その命題は **偽** であるといいます。

← 「100 は大きい数である」
という文は、正しいかどうかははっきりと定まらないので、命題ではありません。

1 (命題の真偽)

[教科書 p.139 例 5]

(1) 命題「8は偶数である」は ☐ です。

(2) 命題「 $n=3$ ならば、 $n^2+1=7$ である」は ☐ です。

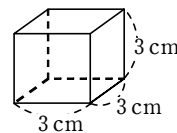
← 正しくは、
 $n^2+1=3^2+1=\text{☐$

2 次の命題の真偽を調べなさい。

[教科書 p.139 練習 5]

(1) 自然数 15 は 3 でわり切れる。

(2) 1 辺が 3 cm の立方体の体積は、 9 cm^3 である。



▶ 命題には「 p ならば q 」の形で表されるものが多くあります。

これを、 $p \Rightarrow q$ とかきます。

← 命題 $p \Rightarrow q$ について、
 p を 仮定、 q を 結論
といいます。

たとえば、命題

「 $n=3 \Rightarrow n^2+1=10$ 」

は、真の命題です。

復習

20 以下の自然数のうち、

8 の倍数全体の集合を P 、4 の倍数全体の集合を Q

とします。

(1) $P=\{ \quad \}$,

$Q=\{ \quad \}$ です。

(2) P 、 Q の関係を記号 $\subset$ で表すと、☐ となります。

▶ n は 20 以下の自然数とします。このとき、

命題「 n は 8 の倍数である $\Rightarrow n$ は 4 の倍数である」

← $8=4 \times 2$, $16=4 \times 4$

は真です。

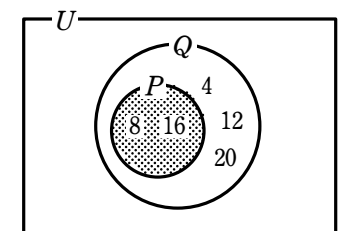
また 8 の倍数である n 全体の集合を P 、

4 の倍数である n 全体の集合を Q

とすると

$P=\{8, 16\}$, $Q=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

となり、 $P \subset Q$ です。



まとめ

全体集合 U の要素のうち、

p を満たす要素全体の集合を P 、

q を満たす要素全体の集合を Q とすると、

「命題 $p \Rightarrow q$ が真」であることは「 $P \subset Q$ 」であることと同じです。

3 (命題の真偽と集合)

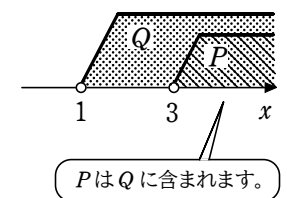
[教科書 p.140 例 6]

x が実数のとき、命題「 $x > 3 \Rightarrow x > 1$ 」を考えます。

$x > 3$ を満たす x 全体の集合を P 、

$x > 1$ を満たす x 全体の集合を Q

とすると、 $P \subset Q$ となるので、この命題は ☐ です。



4 x が実数のとき、命題「 $x < -2 \Rightarrow x < 1$ 」の真偽を、集合を使って調べなさい。

[教科書 p.140 練習 6]



▶ 命題「 $p \Rightarrow q$ 」が偽であるとき、
 p なのに q でない例
があります。
このような例を、 $p \Rightarrow q$ の 反例 といいます。
反例が1つでも見つければ、その命題は偽です。

5 (反例) [教科書 p.141 例 7]
 x が実数のとき、命題「 $x^2=16 \Rightarrow x=-4$ 」を考えます。
 $x=4$ とすると、 $x^2=16$ なのに $x=-4$ でない。
よって、 $x=4$ が反例で、この命題は です。

6 x が実数のとき、次の命題が偽であることを、反例をあげて示しなさい。
(1) $x^2=9 \Rightarrow x=3$ [教科書 p.141 練習 7]

(2) $x > 4 \Rightarrow x \geq 5$

7 「 p ならば q 」の形で、偽である命題を作ってみましょう。

例 鳥 ならば 空を飛ぶ

例 n が偶数 ならば n^2 は8の倍数

● ならば

● ならば

● ならば

隣の人が作った命題を聞いて、その反例を言ってみましょう。

例 鳥 ならば 空を飛ぶ

反例は ニワトリ

例 n が偶数 ならば n^2 は8の倍数

反例は $n=2$

隣の人が作った命題

● ならば

反例は

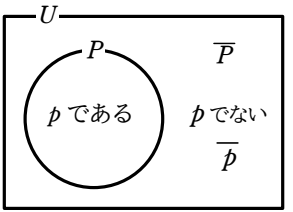
● ならば

反例は

隣の人が作った命題が、
もし偽でなかった場合は、
真であることを説明してあげましょう。

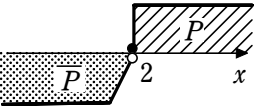


▶ 「 p でない」を p の 否定 といい、 $\overline{p}$ で表します。
全体集合 U の要素のうち、 p であるもの全体の集合を P
とすると、 $\overline{p}$ であるもの全体の集合は
 P の補集合 $\overline{P}$ になります。



[教科書 p.141 例 8]

8 (否定)
 x が実数のとき、「 $x \geq 2$ 」の否定は
「 $x \geq 2$ で 」つまり「」です。



9 (1) x が実数のとき、「 $x < -3$ 」の否定を答えなさい。 [教科書 p.141 練習 8]

(2) n が自然数のとき「 n は偶数である」の否定を答えなさい。

振り返り

- ① **目標**は達成できましたか。
できた まあまあ あまりできなかった
- ② 授業の感想を書きましょう。