

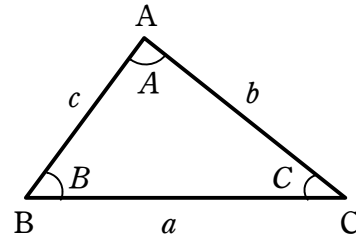
第 2 節 三角形への応用

4 正弦定理

A 正弦定理

**目標** 正弦定理を用いて、三角形の外接円の半径や辺の長さが求められるようになる。  
(p.167 練習 21 , p.168 練習 23 )

ここからは、 $\triangle ABC$  において頂点  $A, B, C$  に向かい合う辺  $BC, CA, AB$  の長さを、それぞれ  $a, b, c$  で表し、 $\angle A, \angle B, \angle C$  の大きさを、それぞれ  $A, B, C$  で表す。



$\triangle ABC$  において、3 辺の長さ  $a, b, c$  と 3 つの角の正弦  $\sin A, \sin B, \sin C$  の間に成り立つ関係を調べてみよう。

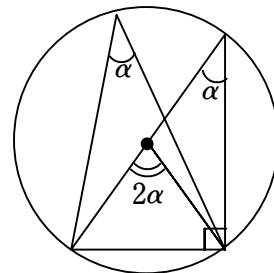
三角形の 3 つの頂点を通る円を、その三角形の  という。

$\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$  とすると、次の等式が成り立つ。

$$a = 2R \sin A$$

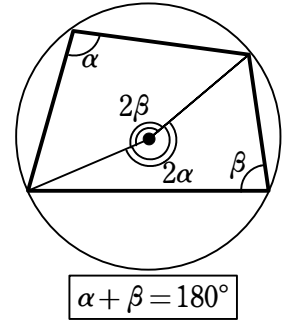
等式  $a = 2R \sin A$  が成り立つことを証明していこう。そのために、次のことを用いる。

- 1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の大きさの半分である。  
とくに、半円の弧に対する円周角の大きさは  $90^\circ$  である。



2 円に内接する四角形に向かい合う角の和は  $180^\circ$  である。

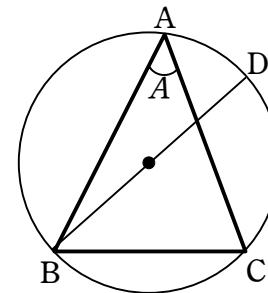
1 は、中学校で学んだ円周角の定理である。  
また、2 は、円周角の大きさが中心角の大きさの半分であることから導かれる。



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

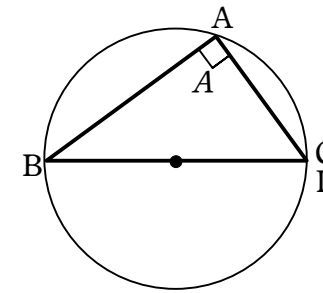
$\triangle ABC$  の外接円の直径  $BD$  を考える。点  $A$  と点  $D$  の、辺  $BC$  に対する位置関係は、 $\angle A$  の大きさ  $A$  により、次の 3 つの場合に分けられる。

[1]  $0^\circ < A < 90^\circ$



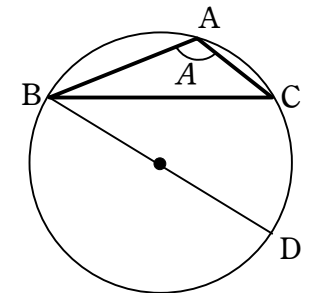
点  $D$  が点  $A$  と同じ側

[2]  $A = 90^\circ$



点  $D$  が辺  $BC$  上

[3]  $90^\circ < A < 180^\circ$



点  $D$  が点  $A$  と異なる側

上の 3 つの場合に分けて、等式

$$a = 2R \sin A$$

が成り立つことを示そう。直角三角形を利用して示していく。

△ABCの外接円の半径を  $R$  とするとき、等式  $a=2R\sin A$  が成り立つことを、直角三角形を利用して示そう。

考え方 帰着する

[1]  $0^\circ < A < 90^\circ$  のとき

右の図で、線分  $BD$  は △ABC の外接円の直径とする。

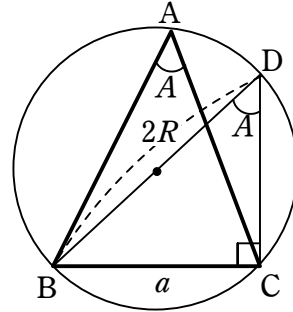
円周角の定理から

$$\angle BDC = \angle BAC = A, \quad \angle BCD = 90^\circ$$

よって、△BCD において

$$a = \boxed{\phantom{000}}$$

すなわち  $a = \boxed{\phantom{000}}$



[2]  $A = 90^\circ$  のとき

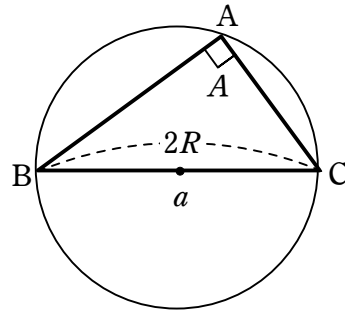
辺  $BC$  は △ABC の外接円の直径である。

外接円の半径は  $R$  であるから

$$a = \boxed{\phantom{000}}$$

$\sin A = \sin 90^\circ = 1$  であるから

$$a = \boxed{\phantom{000}}$$



[3]  $90^\circ < A < 180^\circ$  のとき

右の図で、線分  $BD$  は △ABC の外接円の直径とする。

$\angle BDC = D$  とすると、

四角形  $ABDC$  は円に内接するから

$$A + D = \boxed{\phantom{000}}$$

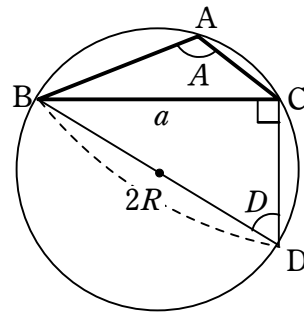
よって

$$\sin D = \sin(180^\circ - A) = \boxed{\phantom{000}} \dots\dots \textcircled{1}$$

$\angle BCD = 90^\circ$  であるから、△BCD において

$$a = \boxed{\phantom{000}} \quad \text{すなわち} \quad a = \boxed{\phantom{000}}$$

①より  $a = \boxed{\phantom{000}}$



以上により、等式  $a=2R\sin A$  が成り立つことが示された。

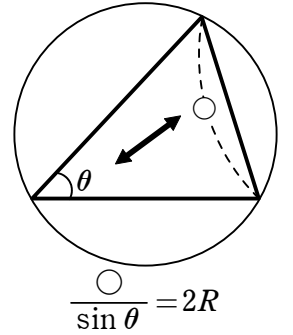
166 ページで示した  $a=2R\sin A$  から、

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{ が成り立つ。}$$

同様に、次が成り立つ。

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

よって、次の  $\boxed{\phantom{000}}$  が得られる。



正弦定理

△ABC の外接円の半径を  $R$  とすると、次が成り立つ。

$$\boxed{\phantom{000}}$$

補足 上の関係式の  $=2R$  以外の部分を、比の形で書くと

$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C \text{ となる。}$$

この比の関係を、 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$  と書くこともある。

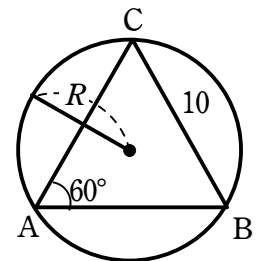
正弦定理を用いて、三角形の外接円の半径を求めてみよう。

例9 1辺の長さが10の正三角形ABCの外接円の半径  $R$  を求める。

正弦定理により、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$  であるから

$$\boxed{\phantom{000}}$$

よって  $R = \boxed{\phantom{000}} = \boxed{\phantom{000}} = \boxed{\phantom{000}}$  終



$$\leftarrow \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5.77\dots$$

練習 21 次のような  $\triangle ABC$  において、外接円の半径  $R$  を求めよ。

目標

(1)  $a=5, A=45^\circ$

□

(2)  $b=8, B=150^\circ$

練習 22  $c=10\sqrt{3}$  である  $\triangle ABC$  において、外接円の半径が  $R=10$  のとき、 $C$  を求めよ。

167ページの正弦定理は、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

とみることもできる。

この等式を用いて、三角形の辺の長さを求めてみよう。

例題 3  $\triangle ABC$  において、 $b=\sqrt{6}, A=45^\circ, B=60^\circ$  のとき、 $a$  を求めよ。

解答 正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

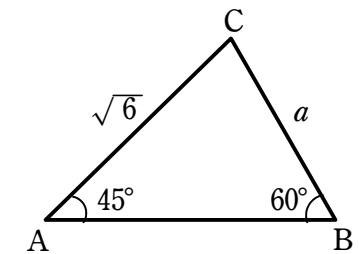
であるから

よって

$$a =$$

$$=$$


$$=$$



② 正弦定理を利用して、三角形のある辺の長さが求められるのは、どの角の大きさ、どの辺の長さがわかっているときだろうか。

練習 23 次のような  $\triangle ABC$  において、指定されたものを求めよ。

目標

(1)  $c = \sqrt{2}$ ,  $B = 30^\circ$ ,  $C = 45^\circ$  のとき  $b$

□

(2)  $a = 2$ ,  $A = 45^\circ$ ,  $C = 120^\circ$  のとき  $c$

正弦定理を活用して、直接測ることのできない距離を求めてみよう。

練習 24 右の図のように、200 m 離れた海岸の 2 地点

A, B と、島にある地点 C について

$\angle CAB = 100^\circ$ ,  $\angle CBA = 30^\circ$

であった。三角比の表を用いて、A, C 間の距離を求めよ。

ただし、小数第 1 位を四捨五入して整数で答えよ。

