

第 2 節 三角形への応用

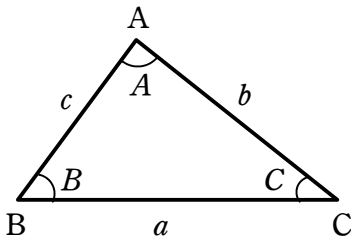
4 正弦定理

A 正弦定理

目標

正弦定理を用いて、三角形の外接円の半径や辺の長さが求められるようになろう。
(p.167 練習 21 , p.168 練習 23)

ここからは、△ABC において頂点 A, B, C に向かい合う辺 BC, CA, AB の長さを、それぞれ a, b, c で表し、
∠A, ∠B, ∠C の大きさを、それぞれ A, B, C で表す。



△ABC において、3 辺の長さ a, b, c と 3 つの角の正弦 $\sin A, \sin B, \sin C$ の間に
成り立つ関係を調べてみよう。

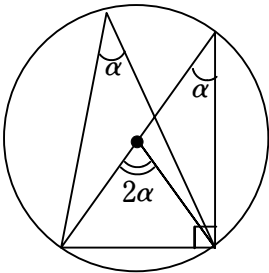
三角形の 3 つの頂点を通る円を、その三角形の という。

△ABC の外接円の半径を R とすると、次の等式が成り立つ。

$a = 2R \sin A$

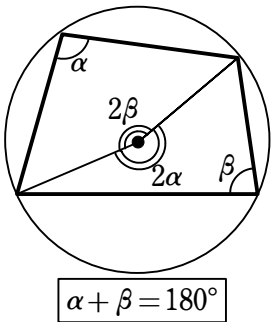
等式 $a = 2R \sin A$ が成り立つことを証明していこう。そのために、
次のことを用いる。

- 1
- 1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する
中心角の大きさの半分である。
とくに、半円の弧に対する円周角の大きさは 90° である。



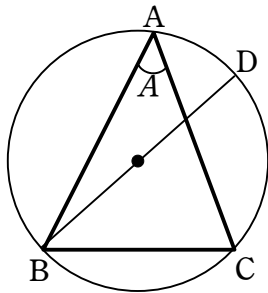
2 円に内接する四角形に向かい合う角の和は 180° である。

1 は、中学校で学んだ円周角の定理である。
また、2 は、円周角の大きさが中心角の大きさの半分であることから
導かれる。

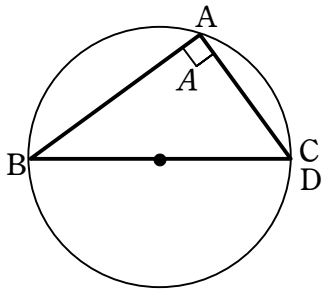


△ABC の外接円の直径 BD を考える。点 A と点 D の、辺 BC に対する位置関係は、
∠A の大きさ A により、次の 3 つの場合に分けられる。

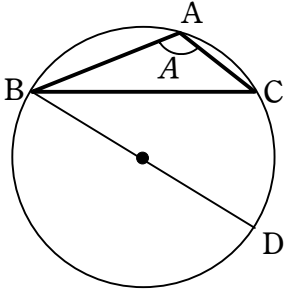
[1] $0^\circ < A < 90^\circ$



[2] $A = 90^\circ$



[3] $90^\circ < A < 180^\circ$



上の 3 つの場合に分けて、等式

$a = 2R \sin A$

が成り立つことを示そう。直角三角形を利用して示していく。

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とするとき、等式 $a = 2R \sin A$ が成り立つことを示そう。

[1] $0^\circ < A < 90^\circ$ のとき

右の図で、線分 BD は $\triangle ABC$ の外接円の直径とする。

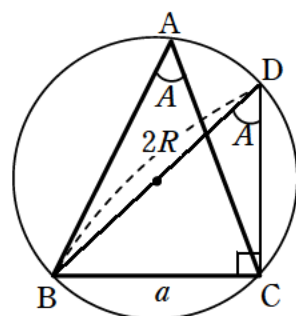
円周角の定理から

$$\angle BDC = \angle BAC = A, \quad \angle BCD = 90^\circ$$

よって、 $\triangle BCD$ において

$$a = \boxed{}$$

すなわち $a = \boxed{}$



[2] $A = 90^\circ$ のとき

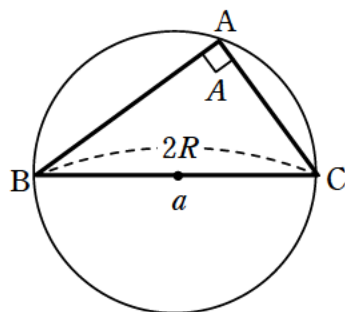
辺 BC は $\triangle ABC$ の外接円の直径である。

外接円の半径は R であるから

$$a = \boxed{}$$

$\sin A = \sin 90^\circ = 1$ であるから

$$a = \boxed{}$$



[3] $90^\circ < A < 180^\circ$ のとき

右の図で、線分 BD は $\triangle ABC$ の外接円の直径とする。

$\angle BDC = D$ とすると、

四角形 $ABDC$ は円に内接するから

$$A + D = \boxed{}$$

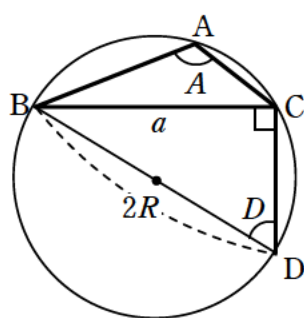
よって

$$\sin D = \sin(180^\circ - A) = \boxed{} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\angle BCD = 90^\circ$ であるから、 $\triangle BCD$ において

$$a = \boxed{} \quad \text{すなわち} \quad a = \boxed{}$$

① より $a = \boxed{}$



以上により、 $\triangle ABC$ において等式 $a = 2R \sin A$ が成り立つことが示された。

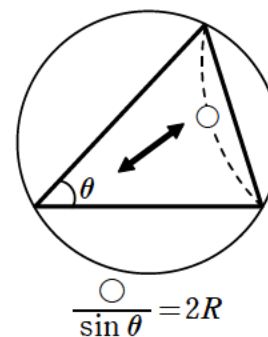
166 ページで示した $a = 2R \sin A$ から、

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{ が成り立つ。}$$

同様に、次が成り立つ。

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

よって、次の $\boxed{}$ が得られる。



正弦定理

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、次が成り立つ。

$$\boxed{}$$

補足 上の関係式を比の形で書くと $a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C$ となる。

この比の関係を、 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ と書くこともある。

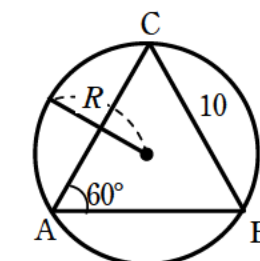
正弦定理を用いて、三角形の外接円の半径を求めてみよう。

例 9 1 辺の長さが 10 の正三角形 ABC の外接円の半径 R を求める。

正弦定理により、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ であるから

$$\boxed{}$$

よって $R = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$ 終



$$\leftarrow \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5.77\dots$$

練習 21 次のような △ABC において，外接円の半径 R を求めよ。

目標

(1) $a=5, A=45^\circ$

□

(2) $b=\sqrt{3}, B=120^\circ$

練習 22 $c=10$ である △ABC において，外接円の半径が $R=10$ のとき， C を求めよ。

167ページの正弦定理は，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}, \quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}, \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

とみることもできる。
この等式を用いて，三角形の辺の長さを求めてみよう。

例題 3 △ABC において， $b=\sqrt{6}$ ， $A=45^\circ$ ， $B=60^\circ$ のとき， a を求めよ。

解答 正弦定理により

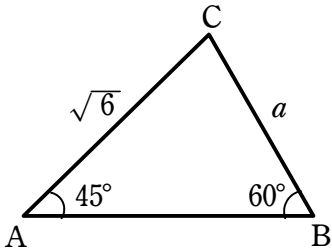
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

であるから

よって

$a=$

$=$ $=$



【？】正弦定理を利用して，三角形のある辺の長さが求められるのは，どの角の大きさ，どの辺の長さがわかっているときだろうか。

練習 23 次のような $\triangle ABC$ において、指定されたものを求めよ。

目標

(1) $c = \sqrt{2}$, $B = 30^\circ$, $C = 45^\circ$ のとき b



(2) $a = 2$, $A = 45^\circ$, $C = 120^\circ$ のとき c

正弦定理を活用して、直接測ることのできない距離を求めてみよう。

練習 24 右の図のように、200 m 離れた海岸の 2 地点 A, B と、島にある地点 C について $\angle CAB = 135^\circ$, $\angle CBA = 15^\circ$ であった。B, C 間の距離を求めよ。

