第２節　２次関数の値の変化

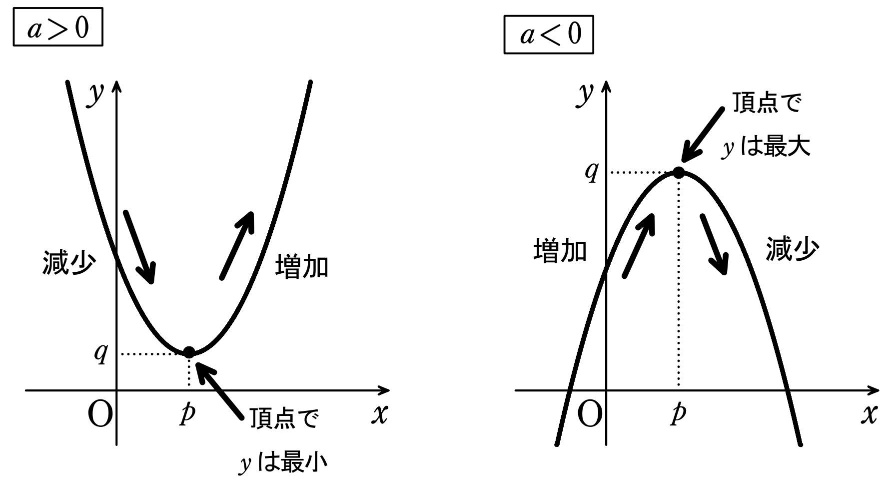
３　２次関数の最大・最小

関数のグラフを利用すると，関数の値の変化の様子を知ることができる。
ここでは，2次関数の値の変化を調べよう。

A　２次関数の最大・最小

2次関数 $y=ax^2$ の値の変化については，79ページで述べた。

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の値の変化についても，a の値が正か負かによって次のような2つの場合がある。



yはいくらでも大きな値をとる
（最大値はない）

yはいくらでも小さな値をとる
（最小値はない）

したがって，次のことがいえる。

> ２次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小
>
> $a>0$ のとき，$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。最大値は $\boxed{\quad}$ 。
>
> $a<0$ のとき，$x=\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$ をとる。最小値は $\boxed{\quad}$ 。

練習13　次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=2(x-3)^2+4$　　　(2)　$y=-2(x+1)^2-3$

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ の最大値，最小値を調べるには，2次式を平方完成して $y=a(x-p)^2+q$ の形にすればよい。

例題3　次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+3$　　　(2)　$y=-2x^2-4x$

解答　(1)　関数の式を変形すると

$y=\boxed{\quad}$　　←放物線は下に凸で，頂点は点$(2,\ -1)$

よって，y は $x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。

最大値は $\boxed{\quad}$ 。

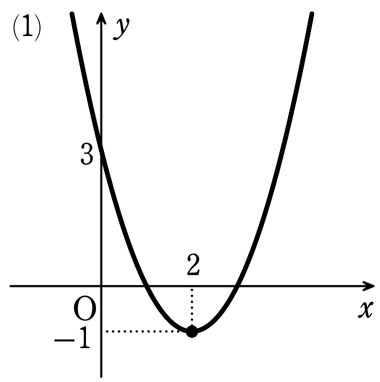
(2)　関数の式を変形すると

$y=\boxed{\quad}$　　←放物線は上に凸で，頂点は点$(-1,\ 2)$

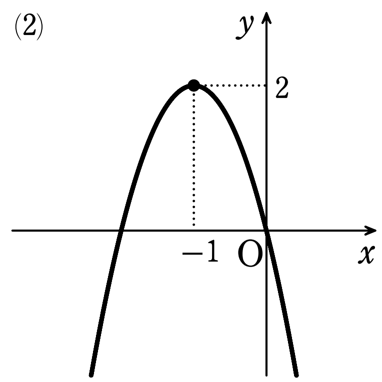
よって，y は $x=\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$ をとる。

最小値は $\boxed{\quad}$ 。

(1)



(2)



練習 14　次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-6x+5$

(2)　$y=-2x^2+5x$

深める　$x=-1$ で最小値をとる 2 次関数を 1 つ定めてみよう。

B　定義域に制限がある場合の関数の最大・最小

例題 4　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+1$　$(0\leqq x\leqq 3)$

(2)　$y=-2x^2+4x+5$　$(-1\leqq x\leqq 0)$

解答　(1)　$y=x^2-4x+1$ を変形すると

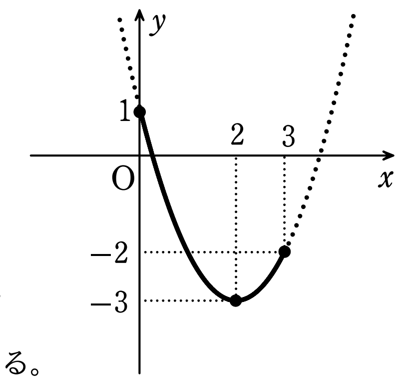
$y=\boxed{\quad\quad}$

$0\leqq x\leqq 3$ でのグラフは，右の図の実線部分である。

よって，y は

$x=\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$ をとり，

$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。



(2)　$y=-2x^2+4x+5$ を変形すると

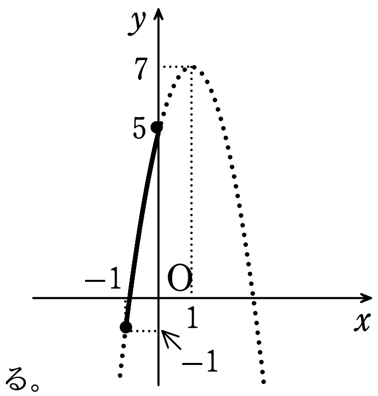
$y=\boxed{\quad\quad}$

$-1\leqq x\leqq 0$ でのグラフは，右の図の実線部分である。

よって，y は

$x=\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$ をとり，

$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。



深める　例題 4 (2) の関数 $y=-2x^2+4x+5$ に対して，次の条件を満たすように定義域を 1 つ定めてみよう。

条件：定義域の両端以外で最大値をとり，定義域の右端のみで最小値をとる。

練習 15 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=x^2+2x+3$ $(-2\leqq x\leqq 2)$

(2) $y=-x^2+4x-3$ $(0\leqq x\leqq 3)$

(3) $y=3x^2+6x-1$ $(1\leqq x\leqq 3)$

(4) $y=-2x^2+12x$ $(0\leqq x\leqq 6)$

応用例題 2

次の条件を満たすように，定数 c の値を定めよ。

(1)　関数 $y=x^2-4x+c$ $(1\leqq x\leqq 5)$ の最大値が 8 である。

(2)　関数 $y=-x^2-2x+c$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値が -3 である。

考え方　(1)　下に凸の放物線では，軸から遠いほど y の値は大きい。

(2)　上に凸の放物線では，軸から遠いほど y の値は小さい。

解答　(1)　$y=x^2-4x+c$ を変形すると

$y=\boxed{}$

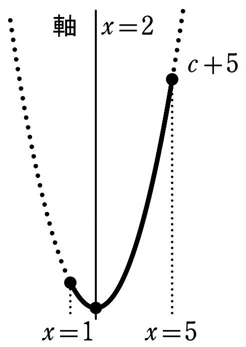
関数 $y=x^2-4x+c$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $\boxed{}$ である。

定義域は $1\leqq x\leqq 5$ であるから，y は

$x=\boxed{}$ で最大値をとる。

$x=\boxed{}$ のとき　$y=\boxed{}$

$\boxed{}=8$ より　　$c=\boxed{}$



(2)　$y=-x^2-2x+c$ を変形すると

$y=\boxed{}$

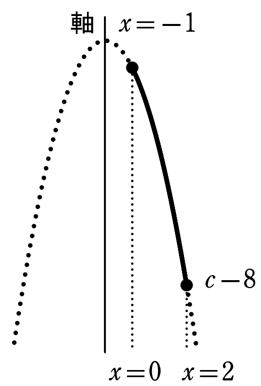
関数 $y=-x^2-2x+c$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $\boxed{}$ である。

定義域は $0\leqq x\leqq 2$ であるから，y は

$x=\boxed{}$ で 最小値をとる。

$x=\boxed{}$ のとき　$y=\boxed{}$

$\boxed{}=-3$ より　　$c=\boxed{}$



練習 16

次の条件を満たすように，定数 c の値を定めよ。

(1)　関数 $y=x^2-2x+c$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ の最大値が 5 である。

(2)　関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -7 である。

C　関数の最大・最小と場合分け

応用例題 3

a は正の定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y=x^2-4x+1 \quad (0 \leqq x \leqq a)$$

考え方　放物線 $y=x^2-4x+1$ は下に凸で，軸は直線 $x=2$ である。

[1]　$0<a<2$　　定義域 $0 \leqq x \leqq a$ は 2 を含まない

[2]　$2 \leqq a$　　定義域 $0 \leqq x \leqq a$ は 2 を含む

で，場合分けをする。

解答　関数の式を変形すると　$y=\boxed{\qquad\qquad}$　$(0 \leqq x \leqq a)$

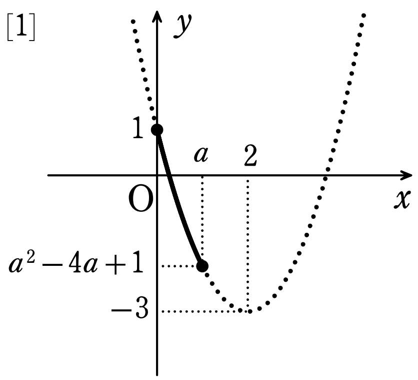
[1]　$\boxed{\qquad\qquad}$ のとき

関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって，y は $x=\boxed{\quad}$ で

最小値 $\boxed{\qquad\qquad}$ をとる。

[1]



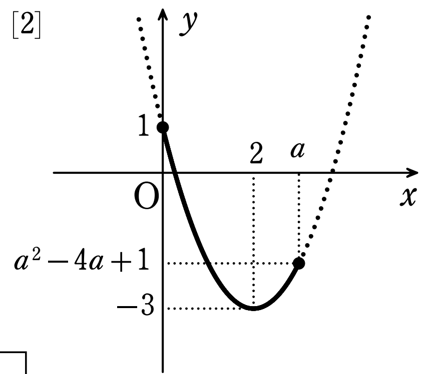
[2]　$\boxed{\qquad\quad}$ のとき

関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって，y は $x=\boxed{\quad}$ で

最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。

[2]



答　$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

練習 17　a は正の定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$y=-x^2+2x+1 \quad (0 \leqq x \leqq a)$$

応用例題 4

a は定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y=x^2-2ax+a^2+1 \quad (0\leqq x\leqq 2)$$

考え方　放物線 $y=x^2-2ax+a^2+1$ は下に凸，軸は直線 $x=a$ である。a が定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の左外，内，右外である場合で次のように場合分けをする。

[1]　$a<0$　　[2]　$0\leqq a\leqq 2$　　[3]　$2<a$

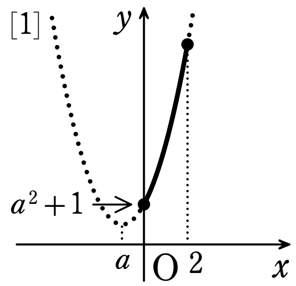
解答　関数の式を変形すると　$y=\boxed{\qquad\qquad}$　$(0\leqq x\leqq 2)$

[1]　$\boxed{\qquad}$ のとき

関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって，y は $x=\boxed{\quad}$ で最小値

$\boxed{\qquad}$ をとる。

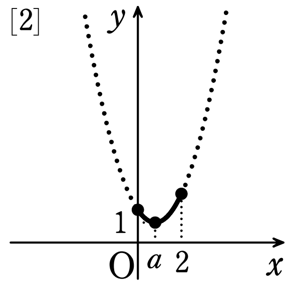


[2]　$\boxed{\qquad\quad}$ のとき

関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって，y は $x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$

をとる。

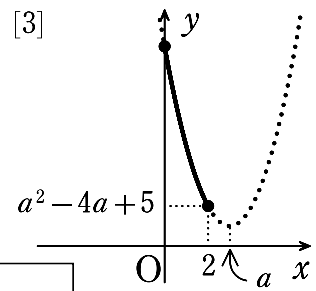


[3]　$\boxed{\qquad}$ のとき

関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって，y は $x=\boxed{\quad}$ で最小値

$\boxed{\qquad\quad}$ をとる。



答　$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

練習 18　a は定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

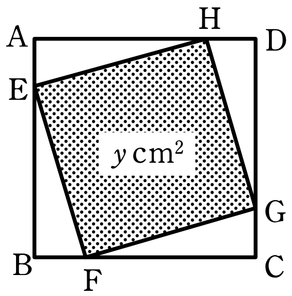
$$y=2x^2-4ax+2a^2 \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

D 最大・最小の応用

2 次関数を使って解決できる問題について，考えてみよう。

応用例題 5

1 辺が 10 cm の正方形 ABCD に，
それより小さい正方形 EFGH を
右の図のように内接させる。
正方形 EFGH の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ と
するとき，y の最小値を求めよ。



考え方　$\mathrm{AH}=x\,(\mathrm{cm})$ として y を x で表す。
x の値の範囲にも注意する。

解答　$\mathrm{AH}=x\ (\mathrm{cm})$ とすると，$\mathrm{AE}=\mathrm{DH}=\boxed{\qquad}\,(\mathrm{cm})$ である。

$x>0$ かつ $10-x>0$ から

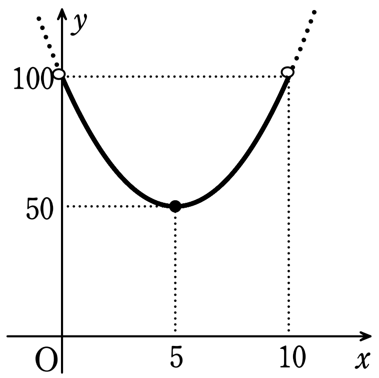
$\boxed{\qquad\qquad}$ …… ①

また，$y=\mathrm{EH}^2$ である。
三平方の定理により

$$\mathrm{EH}^2=\mathrm{AE}^2+\mathrm{AH}^2$$
$$=\boxed{\qquad\qquad}$$
$$=\boxed{\qquad\qquad}$$

よって　$y=\boxed{\qquad\qquad}$

① において，y は $x=\boxed{\quad}$ すなわち $\mathrm{AH}=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。



＜補足＞　正方形 EFGH の面積が最小のとき，1 辺 EH の長さも最小となる。

練習 19

直角三角形 ABC において，直角をはさむ 2 辺 AB，BC の長さの和が 14 cm であるとする。このような直角三角形の面積の最大値を求めよ。