

第 2 節 2 次関数の値の変化

3 2 次関数の最大・最小

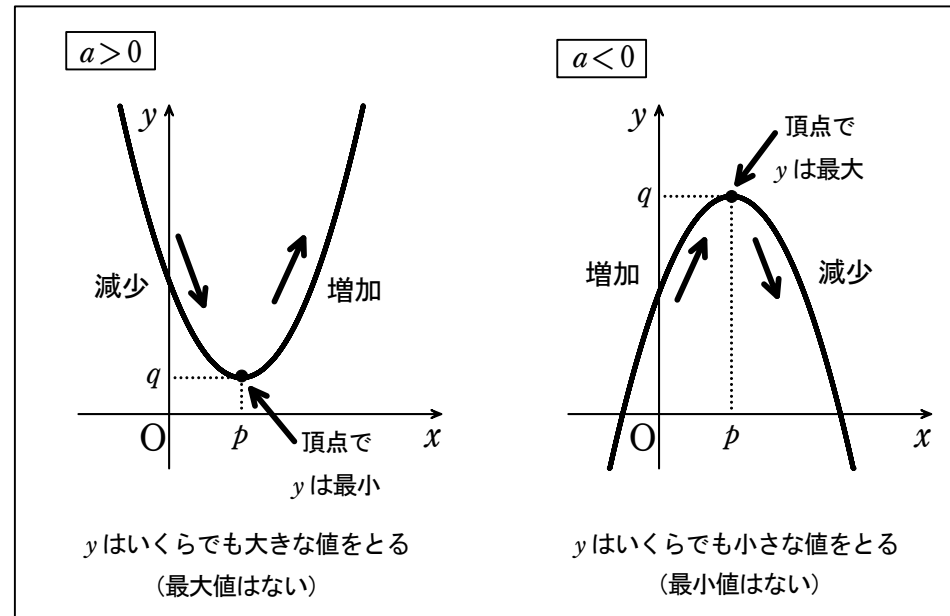
関数のグラフを利用すると、関数の値の変化の様子を知ることができる。

ここでは、2 次関数の値の変化を調べよう。

A 2 次関数の最大・最小

2 次関数 $y = ax^2$ の値の変化については、79 ページで述べた。

2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ の値の変化についても、 a の値が正か負かによって次のような 2 つの場合がある。



したがって、次のことがいえる。

2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ の最大・最小

$a > 0$ のとき、 $x = \square$ で最小値 \square をとる。最大値は \square 。

$a < 0$ のとき、 $x = \square$ で最大値 \square をとる。最小値は \square 。

練習 13 次の 2 次関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(1) $y = 2(x - 3)^2 + 4$

(2) $y = -2(x + 1)^2 - 3$

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の最大値、最小値を調べるには、2 次式を平方完成して $y = a(x - p)^2 + q$ の形にすればよい。

例題 3 次の 2 次関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

(1) $y = x^2 - 4x + 3$

(2) $y = -2x^2 - 4x$

解答 (1) 関数の式を変形すると

$y = \square$

← 放物線は下に凸で、頂点は点 $(2, -1)$

よって、 y は $x = \square$ で最小値 \square をとる。

最大値は \square 。

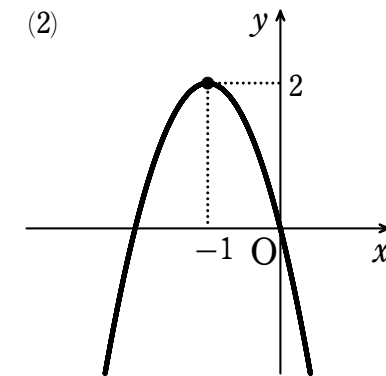
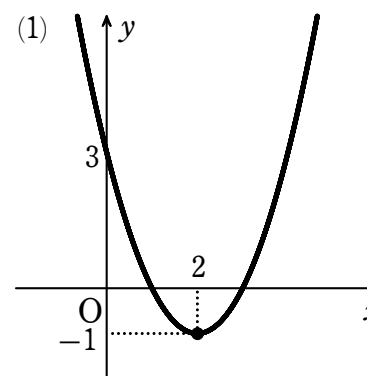
(2) 関数の式を変形すると

$y = \square$

← 放物線は上に凸で、頂点は点 $(-1, 2)$

よって、 y は $x = \square$ で最大値 \square をとる。

最小値は \square 。



練習 14 次の 2 次関数に最大値, 最小値があれば, それを求めよ。

(1) $y = x^2 - 6x + 5$

(2) $y = -2x^2 + 5x$

B 定義域に制限がある場合の関数の最大・最小

例題 4 次の関数の最大値, 最小値を求めよ。

(1) $y = x^2 - 4x + 1$ ($0 \leq x \leq 3$)

(2) $y = -2x^2 + 4x + 5$ ($-1 \leq x \leq 0$)

解答 (1) $y = x^2 - 4x + 1$ を変形すると

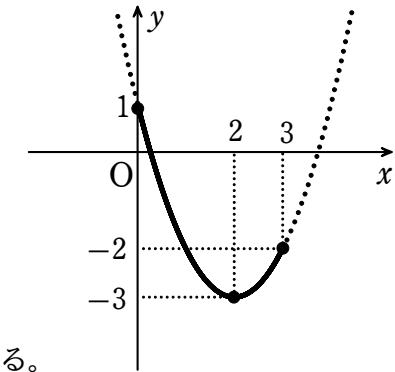
$y =$

$0 \leq x \leq 3$ におけるグラフは、
右の図の実線部分である。

よって, y は

$x =$ で最大値 をとり,

$x =$ で最小値 をとる。



(2) $y = -2x^2 + 4x + 5$ を変形すると

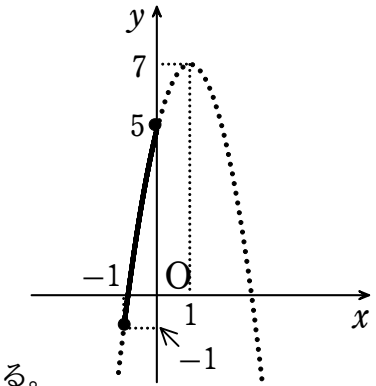
$y =$

$-1 \leq x \leq 0$ におけるグラフは、
右の図の実線部分である。

よって, y は

$x =$ で最大値 をとり,

$x =$ で最小値 をとる。



深める $x = -1$ で最小値をとる 2 次関数を 1 つ定めてみよう。

深める 例題 4 (2) の関数 $y = -2x^2 + 4x + 5$ に対して, 次の条件を満たすように定義域を 1 つ定めてみよう。

条件: 定義域の両端以外で最大値をとり, 定義域の右端のみで最小値をとる。

練習 15 次の関数の最大値, 最小値を求めよ。

(1) $y = x^2 + 2x + 3$ ($-2 \leq x \leq 2$)

(2) $y = -x^2 + 4x - 3$ ($0 \leq x \leq 3$)

(3) $y = 3x^2 + 6x - 1$ ($1 \leq x \leq 3$)

(4) $y = -2x^2 + 12x$ ($0 \leq x \leq 6$)

応用例題 2

次の条件を満たすように、定数 c の値を定めよ。

- (1) 関数 $y = x^2 - 4x + c$ ($1 \leq x \leq 5$) の最大値が 8 である。
- (2) 関数 $y = -x^2 - 2x + c$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値が -3 である。

考え方 (1) 下に凸の放物線では、軸から遠いほど y の値は大きい。
 (2) 上に凸の放物線では、軸から遠いほど y の値は小さい。

解答 (1) $y = x^2 - 4x + c$ を変形すると

$$y = \boxed{}$$

関数 $y = x^2 - 4x + c$ のグラフは下に

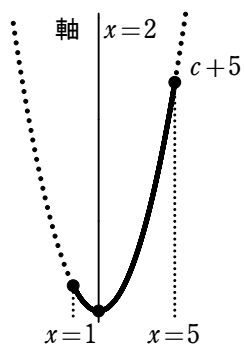
凸の放物線で、軸は直線 $\boxed{}$ である。

定義域は $1 \leq x \leq 5$ であるから、 y は

$x = \boxed{}$ で最大値をとる。

$x = \boxed{}$ のとき $y = \boxed{}$

$\boxed{} = 8$ より $c = \boxed{}$



(2) $y = -x^2 - 2x + c$ を変形すると

$$y = \boxed{}$$

関数 $y = -x^2 - 2x + c$ のグラフは

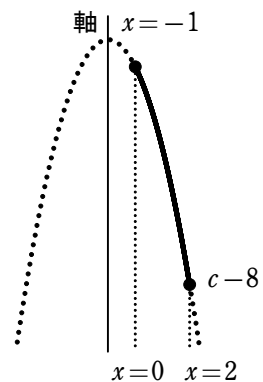
上に凸の放物線で、軸は直線 $\boxed{}$ である。

定義域は $0 \leq x \leq 2$ であるから、 y は

$x = \boxed{}$ で最小値をとる。

$x = \boxed{}$ のとき $y = \boxed{}$

$\boxed{} = -3$ より $c = \boxed{}$



208 ページ
図をかく

練習 16 次の条件を満たすように、定数 c の値を定めよ。

- (1) 関数 $y = x^2 - 2x + c$ ($-2 \leq x \leq 0$) の最大値が 5 である。

- (2) 関数 $y = -x^2 + 6x + c$ ($1 \leq x \leq 4$) の最小値が -7 である。

C 関数の最大・最小と場合分け

応用例題 3

a は正の定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y = x^2 - 4x + 1 \quad (0 \leq x \leq a)$$

考え方 放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ は下に凸で、軸は直線 $x = 2$ である。

[1] $0 < a < 2$ 定義域 $0 \leq x \leq a$ は 2 を含まない

[2] $2 \leq a$ 定義域 $0 \leq x \leq a$ は 2 を含む

で、場合分けをする。

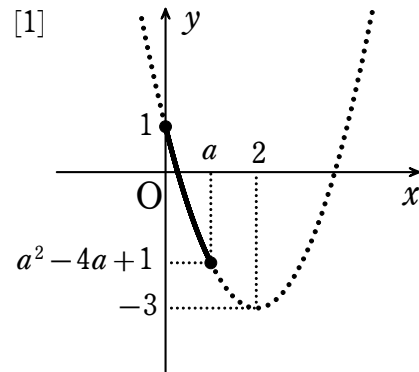
解答 関数の式を変形すると $y = \boxed{}$ ($0 \leq x \leq a$)

[1] $\boxed{}$ のとき

関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって、 y は $x = \boxed{}$ で

最小値 $\boxed{}$ をとる。

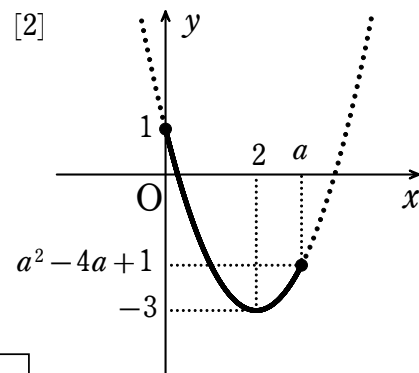


[2] $\boxed{}$ のとき

関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって、 y は $x = \boxed{}$ で

最小値 $\boxed{}$ をとる。



答 $\boxed{}$

$\boxed{}$

206 ページ
場合分けをする

練習 17 a は正の定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$y = -x^2 + 2x + 1 \quad (0 \leq x \leq a)$$

応用例題 4

a は定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 1 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

考え方 放物線 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ は下に凸、軸は直線 $x = a$ である。 a が定義域 $0 \leq x \leq 2$ の左外、内、右外である場合で次のように場合分けをする。

- [1] $a < 0$ [2] $0 \leq a \leq 2$ [3] $2 < a$

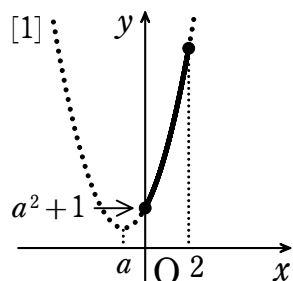
解答 関数の式を変形すると $y = \boxed{}$ ($0 \leq x \leq 2$)

[1] $\boxed{}$ のとき

関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって、 y は $x = \boxed{}$ で最小値

$\boxed{}$ をとる。

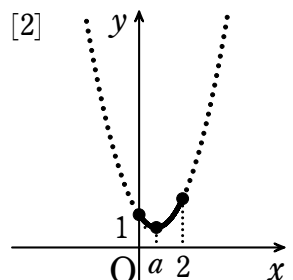


[2] $\boxed{}$ のとき

関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって、 y は $x = \boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$

をとる。

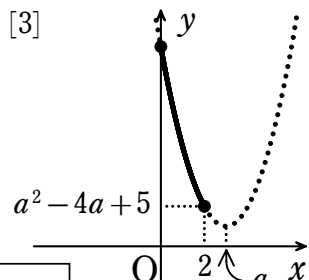


[3] $\boxed{}$ のとき

関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって、 y は $x = \boxed{}$ で最小値

$\boxed{}$ をとる。



答 $\boxed{}$
 $\boxed{}$
 $\boxed{}$

206 ページ
場合分けをする

練習 18 a は定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

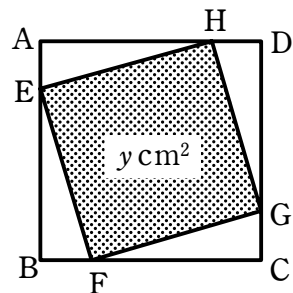
$$y = 2x^2 - 4ax + 2a^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

D 最大・最小の応用

2 次関数を使って解決できる問題について、考えてみよう。

応用例題 5

1 辺が 10 cm の正方形 ABCD に、
それより小さい正方形 EFGH を
右の図のように内接させる。
正方形 EFGH の面積を $y \text{ cm}^2$ と
するとき、 y の最小値を求めよ。



考え方 $AH = x \text{ (cm)}$ として y を x で表す。
 x の値の範囲にも注意する。

解答 $AH = x \text{ (cm)}$ とすると、 $AE = DH = \square \text{ (cm)}$ である。

$x > 0$ かつ $10 - x > 0$ から

$$\square \dots\dots \textcircled{1}$$

また、 $y = EH^2$ である。

三平方の定理により

$$EH^2 = AE^2 + AH^2$$

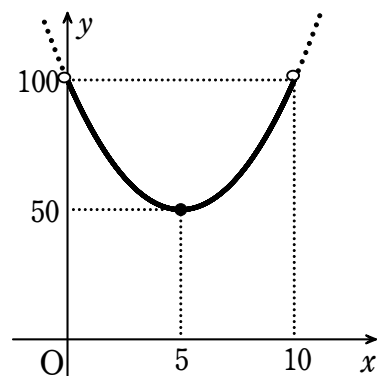
$$= \square$$

$$= \square$$

よって $y = \square$

①において、 y は $x = \square$ すなわち

$AH = \square$ で最小値 \square をとる。



205 ページ
文字で表す

<補足> 正方形 EFGH の面積が最小のとき、1 辺 EH の長さも最小となる。

練習 19 直角三角形 ABC において、直角をはさむ 2 辺 AB, BC の長さの和が 14 cm であるとする。このような直角三角形の面積の最大値を求めよ。

