研究　グラフの移動

関数 $y=f(x)$ のグラフ F を

x 軸方向に p，　y 軸方向に q

だけ平行移動して得られる曲線を G とするとき，G の方程式は

$$y-q=f(x-p)$$

である。このことを調べてみよう。

G 上に任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとり，この平行移動によって P に移される F 上の点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると

$x=X+p$，$y=Y+q$

すなわち　$X=x-p$，$Y=y-q$

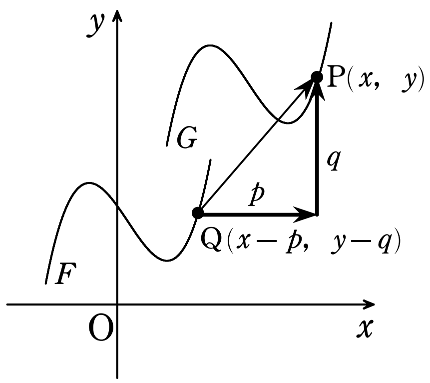
点 Q は F 上にあるから

$Y=f(X)$

この式の X に $x-p$ を，Y に $y-q$ を代入すると

$y-q=f(x-p)$

これが曲線 G の方程式である。

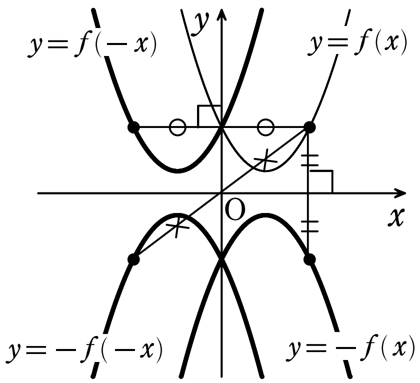


また，関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸，y 軸，原点に関して対称移動して得られる曲線の方程式は，それぞれ次のようになる。

x 軸：$\boxed{\qquad\qquad}$

y 軸：$\boxed{\qquad\qquad}$

原点：$\boxed{\qquad\qquad}$



３　２次関数の最大と最小

関数のグラフを利用すると，関数の値の変化の様子を知ることができる。
78 ページでは，1 次関数のグラフをもとにして，関数の最大値，最小値について学んだ。ここでは，2 次関数のグラフをもとにして，２次関数の最大と最小，更に，定義域に制限がある場合の最大と最小について学ぼう。そして，最大・最小の応用として，日常に現れる数量の関係を関数として表し，その最大値や最小値を求めてみよう。

A　２次関数の最大と最小

2 次関数の最大値や最小値を求めることを考えよう。

例 9　2 次関数 $y=2x^2-8x+5$ の最大値，最小値

この関数の式は

$y=\boxed{\qquad\qquad}$

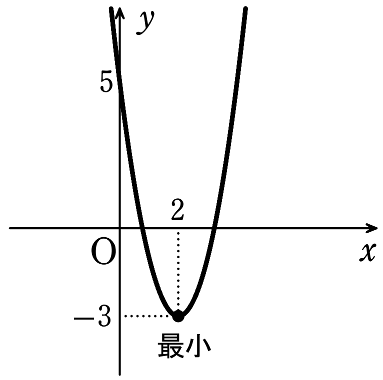
と変形される。そのグラフは下に凸で，y の値は頂点で最小となる。

よって，この関数は

$x=\boxed{\qquad}$ で最小値 $\boxed{\qquad}$

をとる。

また，y はいくらでも大きな値をとるから，最大値は $\boxed{\qquad}$。 終



問 4　2次関数 $y=-2(x-2)^2+3$ に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

深める　$x=1$ で最小値をとる2次関数を1つ定めてみよう。

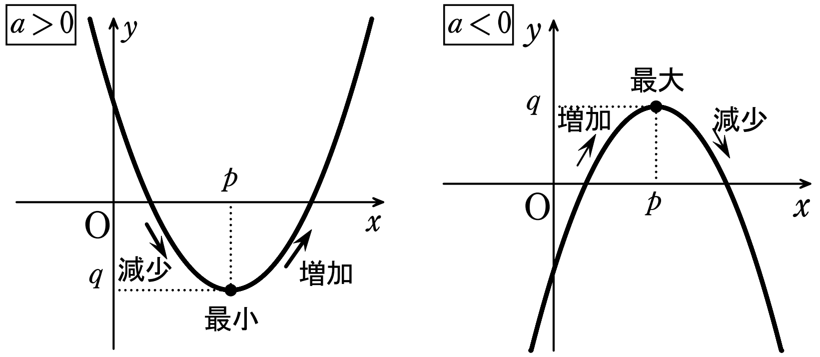
一般に，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ は $y=a(x-p)^2+q$ の形に表され，その最大値，最小値について，次のことがいえる。

2次関数の最大と最小

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ は

$a>0$ のとき，$x=\boxed{\quad}$ で **最小値** $\boxed{\quad}$ をとり，最大値は $\boxed{\quad}$。

$a<0$ のとき，$x=\boxed{\quad}$ で **最大値** $\boxed{\quad}$ をとり，最小値は $\boxed{\quad}$。



例題 3　次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$$y=-x^2-4x-1$$

解　この関数の式を変形すると

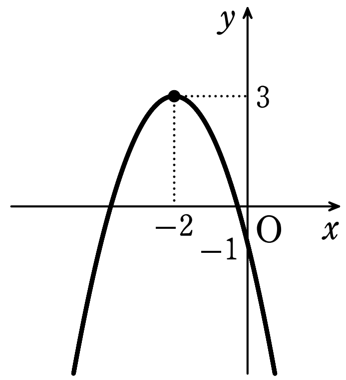
$y=\boxed{\quad}$

よって，この関数は

$x=\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$

をとる。

また，最小値は $\boxed{\quad}$。



練習 16　次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2+4x+2$

(2)　$y=-x^2+6x-4$

(3)　$y=2x^2+4x+3$

(4)　$y=-2x^2-6x$

B 定義域に制限がある場合の最大と最小

例題 4　次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y=x^2-2x+2 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$$

解　この関数の式は

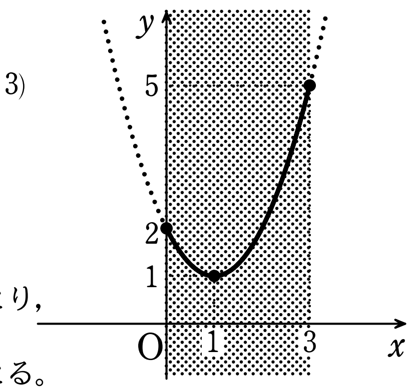
$y=\boxed{\qquad\qquad}$　$(0 \leqq x \leqq 3)$

と変形され，そのグラフは右の図の実線部分である。

よって，この関数は

$x=\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$ をとり，

$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。



練習 17　次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=-x^2+1$　$(1 \leqq x \leqq 3)$

(2)　$y=2x^2-4x+1$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

(3)　$y=-2x^2+12x$　$(0\leqq x\leqq 6)$

例題 5　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$$y=-x^2+4x+3\quad (1<x<5)$$

解　この関数の式は

$y=\boxed{}$　$(1<x<5)$

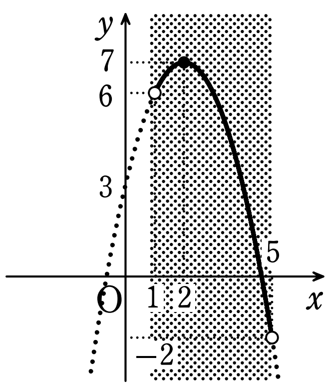
と変形され，そのグラフは右の

図の実線部分である。

よって，この関数は

$x=\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとる。

また，最小値は $\boxed{}$。



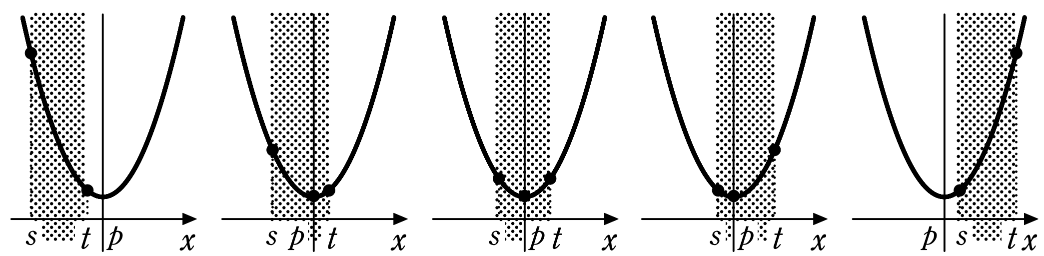
練習 18　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2+2x$　$(-2<x<1)$

(2)　$y=-2x^2+3x+1$　$(0<x\leqq 2)$

94 ページで調べたように，x の 2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ について，定義域を $s\leqq x\leqq t$ に制限して最大値，最小値を求めるときは，グラフの頂点や定義域の端での y の値を比較する。

$a>0$



例題 6

関数 $y=x^2+2x+c$ $(-2\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 5 であるように，定数 c の値を定めよ。

解　この関数の式は

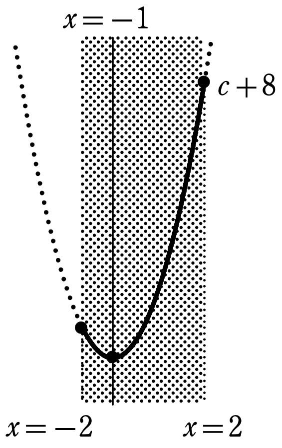
$y=\boxed{}$ $(-2\leqq x\leqq 2)$

と変形され，この関数は $x=\boxed{}$ で最大値をとる。

$x=\boxed{}$ のとき

$y=\boxed{}$

ゆえに，$\boxed{}=5$ から　$c=\boxed{}$



→ p.213 数学の考え方　図をかく

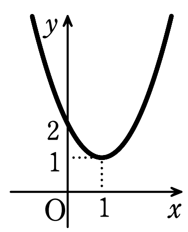
練習 19

関数 $y=2x^2-12x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最大値が 5 であるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

深める　関数 $y=(x-1)^2+1$ $(s\leqq x\leqq t)$ について，次の x の値で最大値，最小値をとるように，定義域 $s\leqq x\leqq t$ を 1 つ定めてみよう。

(1)　$x=s$ で最大値をとり，$x=1$ で最小値をとる。

(2)　$x=s$ で最大値をとり，$x=t$ で最小値をとる。



応用例題 3

a は正の定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y=x^2-4x+1\quad (0\leqq x\leqq a)$$

解説　$y=x^2-4x+1$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$ である。定義域 $0\leqq x\leqq a$ が 2 を含むかどうかで場合分けをする。

解　この関数の式を変形すると　$y=\boxed{}$ $(0\leqq x\leqq a)$

[1]　$\boxed{}$ のとき

この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

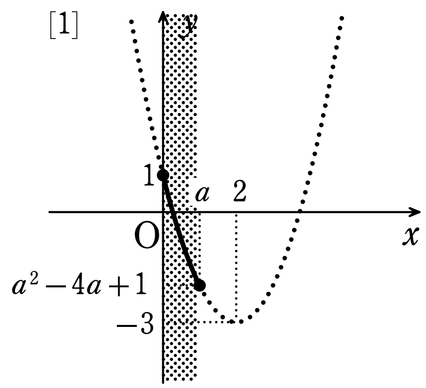
よって，$x=\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる。

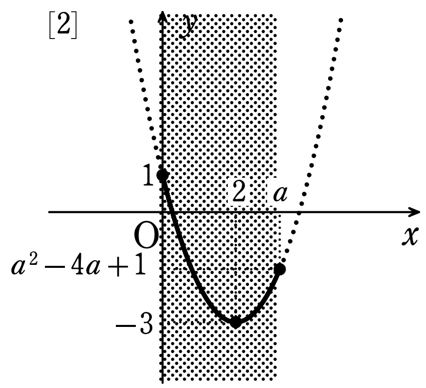
[2]　$\boxed{}$ のとき

この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって，$x=\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる。

答　$\boxed{}$





→ p.216 数学の考え方　場合分けをする

練習 20　a は正の定数とする。関数 $y=-x^2+2x+1$ $(0\leqq x\leqq a)$ の最大値を求めよ。

問 5　次の問いに答えよ。

(1)　応用例題 3 の関数について，定義域の両端 $x=0$，$x=a$ における y の値が一致するときの，定数 a の値を求めよ。

(2)　応用例題 3 の関数の最大値を求めよ。

応用例題 4

a は定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y=x^2-2ax+a^2+1 \quad (0\leqq x\leqq 2)$$

解説　$y=x^2-2ax+a^2+1$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。a が定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の左外，内，右外のいずれにあるかで場合分けをする。

解　この関数の式を変形すると　$y=\boxed{\qquad\qquad}$　$(0\leqq x\leqq 2)$

[1]　$\boxed{\qquad\quad}$ のとき

この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって，$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\qquad\quad}$ をとる。

[2]　$\boxed{\qquad\qquad}$ のとき

この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

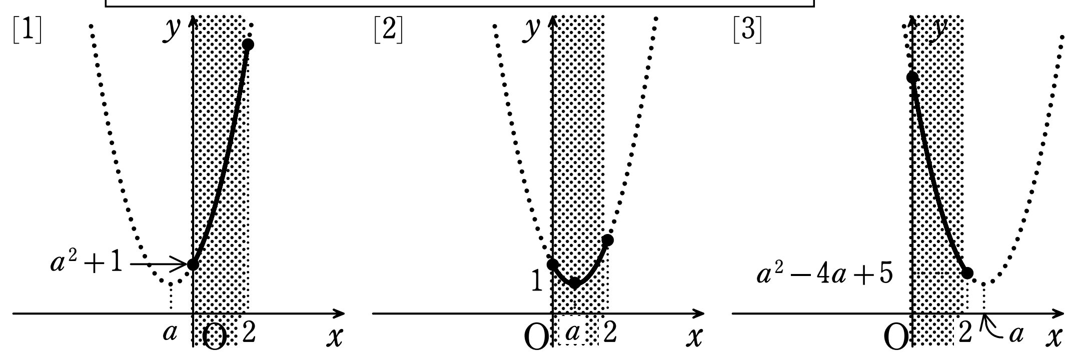
よって，$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。

[3]　$\boxed{\qquad\quad}$ のとき

この関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって，$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\qquad\qquad}$ をとる。

答　$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$



→ p.216 数学の考え方　場合分けをする

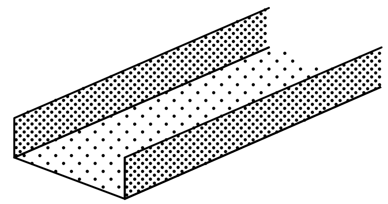
練習 21　a は定数とする。関数 $y=2x^2-4ax+2a^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最小値を求めよ。

問 6　応用例題 4 の関数の最大値を求めよ。

C 最大・最小の応用

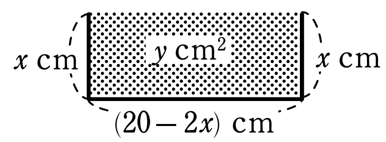
応用例題 5

幅 20 cm の金属板を，右の図のように，両端から等しい長さだけ直角に折り曲げて，断面が長方形状の水路を作る。このとき，断面積が最大になるようにするためには，端から何 cm のところで折り曲げればよいか。また，その断面積の最大値を求めよ。



解説　まず，変数を適当に定め，その変数を用いて断面積を表す。

解　折り曲げる部分の長さを x cm，断面積を y cm^2 とする。



底の幅は $(20-2x)$ cm で，

$x>0$，$20-2x>0$

であるから

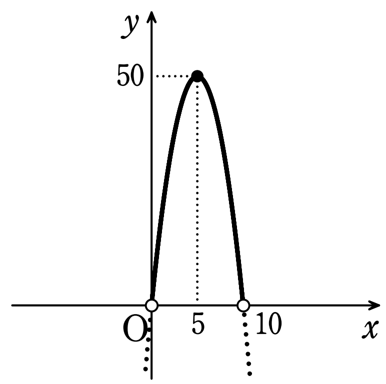
$\boxed{}$ ……①

また，y は

$y=\boxed{}$

$=\boxed{}$

$=\boxed{}$



よって，① の範囲の x について，

y は，$x=\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとる。

ゆえに，端から $\boxed{}$ cm のところで折り曲げればよい。

また，断面積の最大値は $\boxed{}$ cm^2 である。

→ p.214 数学の考え方　文字で表す

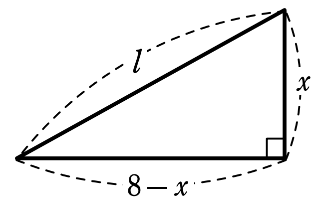
練習 22　長さ 40 cm の針金を 2 つに切り，2 本の針金をそれぞれ折り曲げて，正方形を 2 つ作る。それらの正方形の面積の和を最小にするには，針金をどのように切ればよいか。また，その面積の和の最小値を求めよ。

応用例題 6

直角を挟む 2 辺の長さの和が 8 である直角三角形のうち，斜辺の長さが最小である直角三角形の 3 辺の長さを求めよ。

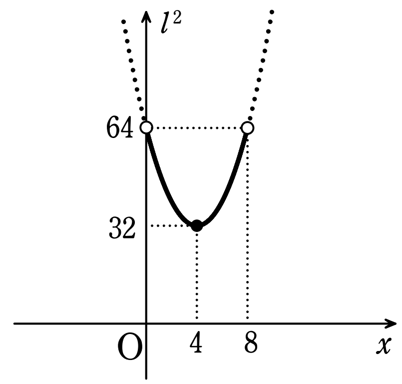
解説　斜辺の長さを l とすると，$l>0$ であるから，l^2 が最小となるとき l も最小となる。

解　直角を挟む 2 辺のうちの一方の長さを x とすると，他方の長さは $8-x$ で表され，$x>0$，$8-x>0$ であるから



$\boxed{\qquad\qquad}$ ……①

また，斜辺の長さを l とすると，三平方の定理から



$l^2=\boxed{\qquad\qquad}$

$=\boxed{\qquad\qquad}$

$=\boxed{\qquad\qquad}$

よって，① の範囲の x について，

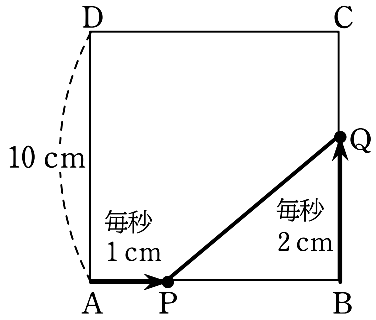
l^2 は，$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。

$l>0$ であるから，l^2 が最小となるとき l も最小となる。

ゆえに，l は，$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\qquad\qquad}$ をとる。

したがって，求める 3 辺の長さは $\boxed{\qquad\qquad}$ である。

練習23 1辺の長さが10 cmの正方形ABCDがある。点PはAを出発して，辺AB上を毎秒1 cmの速さでBに向かって進み，点Qは，点Pと同時にBを出発して，辺BC上を毎秒2 cmの速さでCに向かって進む。
QがCに達するまでにP，Q間の距離が最小になるのは，出発してから何秒後か。また，その最小の距離を求めよ。



研究　定義域の両端が動く場合の最大

例1 a は定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$y=-x^2+4x \quad (a \leqq x \leqq a+2)$$

解説　$y=-x^2+4x$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$ である。
2が定義域 $a \leqq x \leqq a+2$ の右外，内，左外のいずれにあるかで場合分けをする。

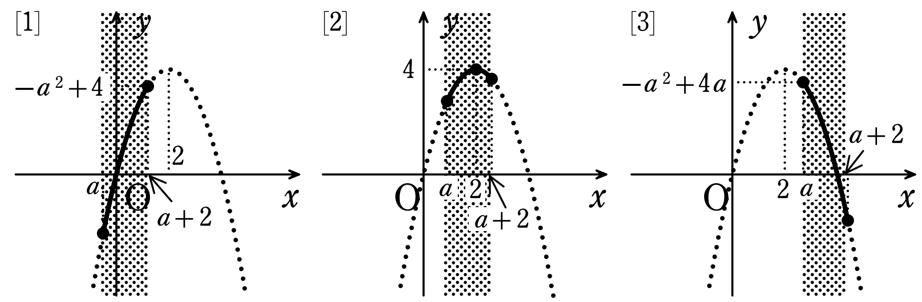
解　この関数の式を変形すると　$y=$ □　$(a \leqq x \leqq a+2)$

[1] □ のとき
この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって，$x=$ □ で最大値 □ をとる。

[2] □ のとき
この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって，$x=$ □ で最大値 □ をとる。

[3] □ のとき
この関数のグラフは図[3]の実線部分である。
よって，$x=$ □ で最大値 □ をとる。

答 □



【補足】例1を反復学習するための問題は，129ページの演習問題5にある。