研究 グラフの移動

関数 $y=f(x)$ のグラフ F を

x 軸方向に p，　y 軸方向に q

だけ平行移動して得られる曲線を G とするとき，G の方程式は

$$y-q=f(x-p)$$

である。このことを調べてみよう。

G 上に任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとり，この平行移動によって P に移される F 上の点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると

$x=X+p$，$y=Y+q$

すなわち　$X=x-p$，$Y=y-q$

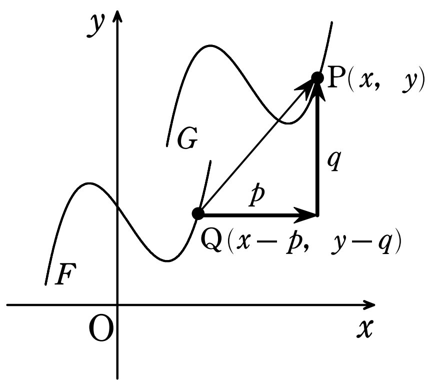
点 Q は F 上にあるから

$Y=f(X)$

この式の X に $x-p$ を，Y に $y-q$ を代入すると

$y-q=f(x-p)$

これが曲線 G の方程式である。

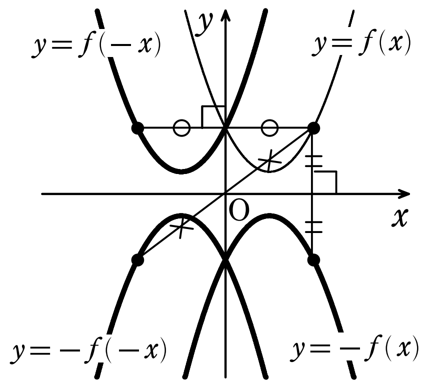


また，関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸，y 軸，原点に関して対称移動して得られる曲線の方程式は，それぞれ次のようになる。

x 軸：$\boxed{\quad\quad}$

y 軸：$\boxed{\quad\quad}$

原点：$\boxed{\quad\quad}$



3　2次関数の最大と最小

関数のグラフを利用すると，関数の値の変化の様子を知ることができる。
78ページでは，1次関数のグラフをもとにして，関数の最大値，最小値について学んだ。ここでは，2次関数のグラフをもとにして，2次関数の最大と最小，更に，定義域に制限がある場合の最大と最小について学ぼう。そして，最大・最小の応用として，日常に現れる数量の関係を関数として表し，その最大値や最小値を求めてみよう。

A　2次関数の最大と最小

2次関数の最大値や最小値を求めることを考えよう。

例9　2次関数 $y=2x^2-8x+5$ の最大値，最小値

この関数の式は

$y=\boxed{\quad\quad}$

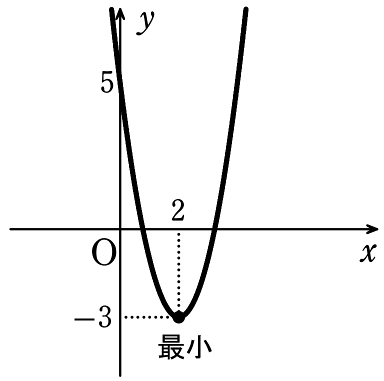
と変形される。そのグラフは下に凸で，y の値は頂点で最小となる。

よって，この関数は

$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$

をとる。

また，y はいくらでも大きな値をとるから，最大値は $\boxed{\quad}$。　終



問 4　2次関数 $y=-2(x-2)^2+3$ に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

深める　$x=1$ で最小値をとる2次関数を1つ定めてみよう。

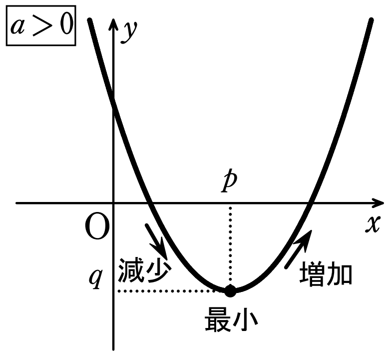
一般に，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ は $y=a(x-p)^2+q$ の形に表され，その最大値，最小値について，次のことがいえる。

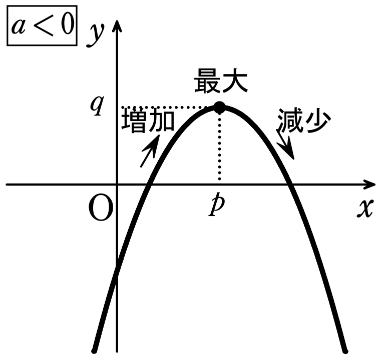
2次関数の最大と最小

2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ は

$a>0$ のとき，$x=\boxed{\quad}$ で **最小値** $\boxed{\quad}$ をとり，最大値は $\boxed{\quad}$。

$a<0$ のとき，$x=\boxed{\quad}$ で **最大値** $\boxed{\quad}$ をとり，最小値は $\boxed{\quad}$。





例題 3　次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$$y=-x^2-4x-1$$

解　この関数の式を変形すると

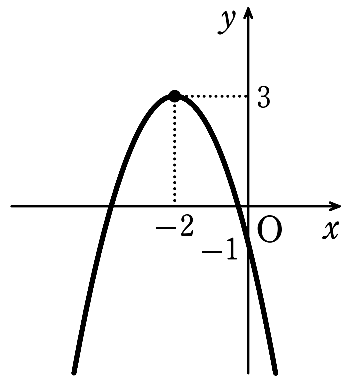
$y=\boxed{\qquad\qquad}$

よって，この関数は

$x=\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$

をとる。

また，最小値は $\boxed{\quad}$。



練習 16　次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2+4x+2$

(2)　$y=-x^2+6x-4$

(3)　$y=2x^2+4x+3$

(4)　$y=-2x^2-6x$

B　定義域に制限がある場合の最大と最小

例題 4　次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y=x^2-2x+2 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$$

解　この関数の式は

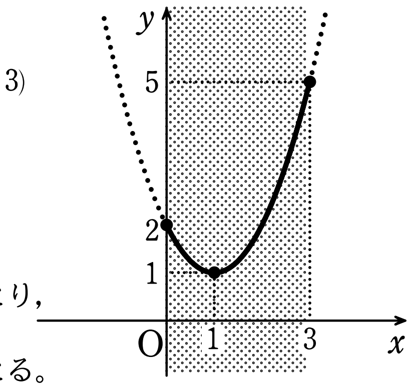
$y=\boxed{}$　$(0 \leqq x \leqq 3)$

と変形され，そのグラフは右の図の実線部分である。

よって，この関数は

$x=\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとり，

$x=\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる。



練習 17　次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=-x^2+1$　$(1 \leqq x \leqq 3)$

(2)　$y=2x^2-4x+1$　$(-1 \leqq x \leqq 2)$

(3)　$y=-2x^2+12x$　$(0 \leqq x \leqq 6)$

例題 5　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$$y=-x^2+4x+3 \quad (1<x<5)$$

解　この関数の式は

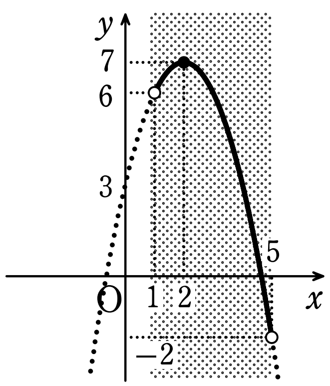
$y=\boxed{\qquad\qquad}$　$(1<x<5)$

と変形され，そのグラフは右の図の実線部分である。

よって，この関数は

$x=\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$ をとる。

また，最小値は $\boxed{\quad}$。



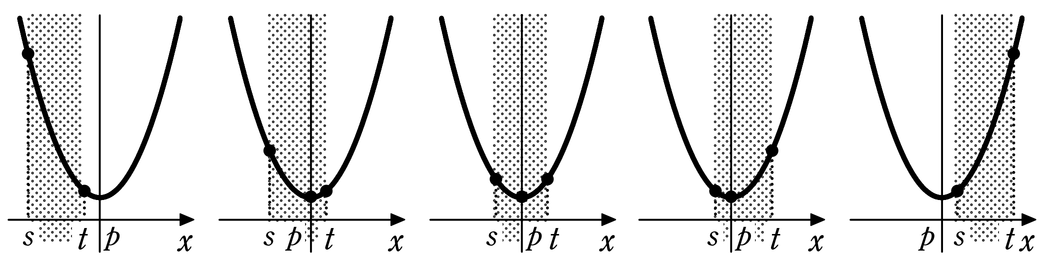
練習 18　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2+2x$　$(-2<x<1)$

(2)　$y=-2x^2+3x+1$　$(0<x \leqq 2)$

94 ページで調べたように，x の２次関数 $y=a(x-p)^2+q$ について，定義域を $s \leqq x \leqq t$ に制限して最大値，最小値を求めるときは，グラフの頂点や定義域の端での y の値を比較する。

$a>0$



例題 6　関数 $y=x^2+2x+c$ $(-2\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 5 であるように，定数 c の値を定めよ。

解　この関数の式は

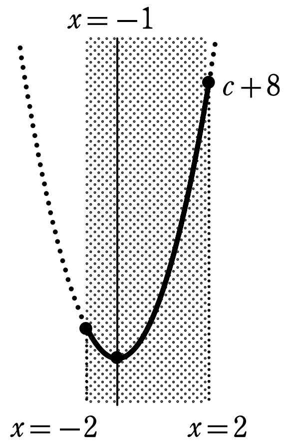
$y=\boxed{\qquad\qquad}$ $(-2\leqq x\leqq 2)$

と変形され，この関数は $x=\boxed{\quad}$ で最大値をとる。

$x=\boxed{\quad}$ のとき

$y=\boxed{\qquad\qquad}$

ゆえに，$\boxed{\qquad}=5$ から　$c=\boxed{\qquad}$

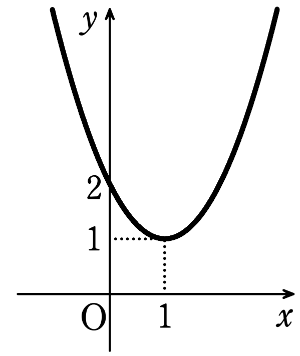


練習 19　関数 $y=2x^2-12x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最大値が 5 であるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

深める　関数 $y=(x-1)^2+1$ $(s\leqq x\leqq t)$ について，次の x の値で最大値，最小値をとるように，定義域 $s\leqq x\leqq t$ を 1 つ定めてみよう。

(1)　$x=s$ で最大値をとり，$x=1$ で最小値をとる。

(2)　$x=s$ で最大値をとり，$x=t$ で最小値をとる。



応用例題 3

a は正の定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y=x^2-4x+1 \quad (0\leqq x\leqq a)$$

解説　$y=x^2-4x+1$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$ である。定義域 $0\leqq x\leqq a$ が 2 を含むかどうかで場合分けをする。

解　この関数の式を変形すると　$y=\boxed{\qquad\qquad}$ $(0\leqq x\leqq a)$

[1]　$\boxed{\qquad\quad}$ のとき

この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって，$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\qquad\qquad}$ をとる。

[2]　$\boxed{\qquad\quad}$ のとき

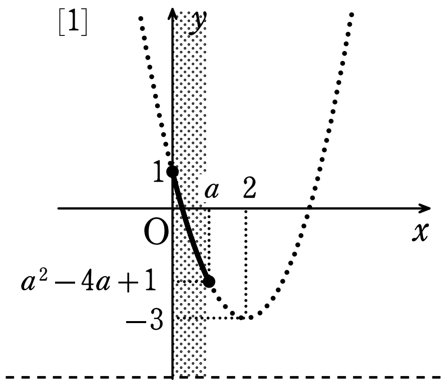
この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって，$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\qquad}$ をとる。

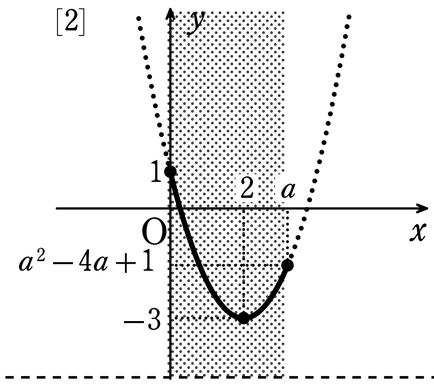
答　$0<a<2$ のとき　　$x=a$ で最小値 a^2-4a+1

　　$2\leqq a$ のとき　　$x=2$ で最小値 -3

[1]



[2]



練習 20　a は正の定数とする。関数 $y=-x^2+2x+1$ $(0\leqq x\leqq a)$ の最大値を求めよ。

問 5　次の問いに答えよ。

(1)　応用例題 3 の関数について，定義域の両端 $x=0$，$x=a$ における y の値が一致するときの，定数 a の値を求めよ。

(2)　応用例題 3 の関数の最大値を求めよ。

応用例題 4

a は定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y=x^2-2ax+a^2+1 \quad (0\leqq x\leqq 2)$$

$\boxed{\text{解説}}$　$y=x^2-2ax+a^2+1$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。a が定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の左外，内，右外のいずれにあるかで場合分けをする。

解　この関数の式を変形すると　$y=\boxed{\qquad\qquad}$　$(0\leqq x\leqq 2)$

[1]　$\boxed{\qquad\quad}$ のとき

この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

よって，$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\qquad\quad}$ をとる。

[2]　$\boxed{\qquad\qquad}$ のとき

この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって，$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\quad}$ をとる。

[3]　$\boxed{\qquad\quad}$ のとき

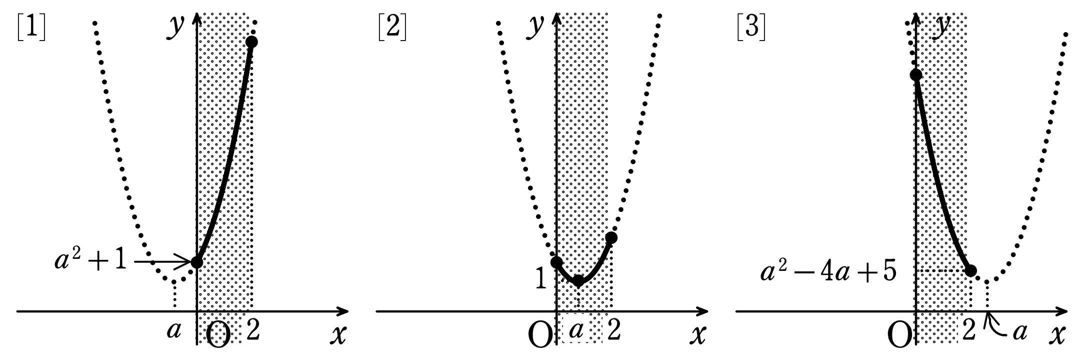
この関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって，$x=\boxed{\quad}$ で最小値 $\boxed{\qquad\qquad}$ をとる。

答　$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 a^2+1

$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 1

$2<a$ のとき　　$x=2$ で最小値 a^2-4a+5



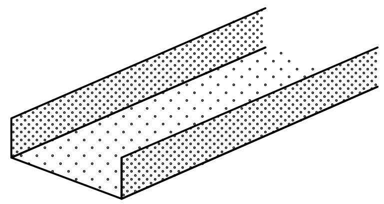
練習 21　a は定数とする。関数 $y=2x^2-4ax+2a^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最小値を求めよ。

問 6　応用例題 4 の関数の最大値を求めよ。

C　最大・最小の応用

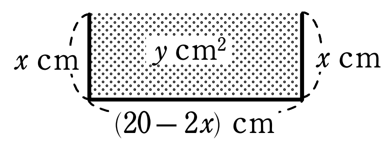
応用例題 5

幅 20 cm の金属板を，右の図のように，両端から等しい長さだけ直角に折り曲げて，断面が長方形状の水路を作る。このとき，断面積が最大になるようにするためには，端から何 cm のところで折り曲げればよいか。また，その断面積の最大値を求めよ。



$\boxed{\text{解説}}$　まず，変数を適当に定め，その変数を用いて断面積を表す。

解　折り曲げる部分の長さを x cm，断面積を y cm^2 とする。



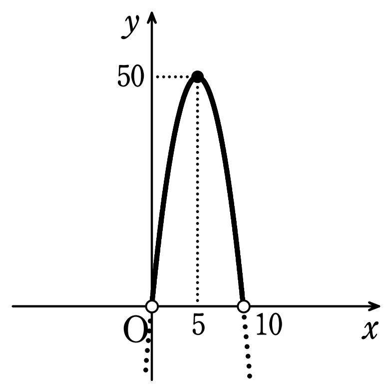
底の幅は $(20-2x)$ cm で，

$x>0$，$20-2x>0$

であるから

$\boxed{\qquad\qquad}$ ……①

また，y は



$y=\boxed{\qquad\qquad}$

$=\boxed{\qquad\qquad}$

$=\boxed{\qquad\qquad\qquad}$

よって，① の範囲の x について，

y は，$x=\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$ をとる。

ゆえに，端から $\boxed{\quad}$ cm のところで折り曲げればよい。

また，断面積の最大値は $\boxed{\quad}$ cm^2 である。

練習 22 長さ 40 cm の針金を２つに切り，２本の針金をそれぞれ折り曲げて，正方形を２つ作る。それらの正方形の面積の和を最小にするには，針金をどのように切ればよいか。また，その面積の和の最小値を求めよ。

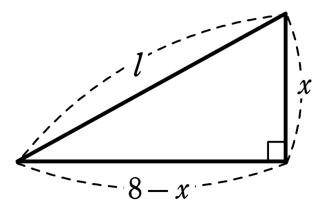
応用例題 6

直角を挟む２辺の長さの和が８である直角三角形のうち，斜辺の長さが最小である直角三角形の３辺の長さを求めよ。

$\boxed{\text{解説}}$ 斜辺の長さを l とすると，$l>0$ であるから，l^2 が最小となるとき l も最小となる。

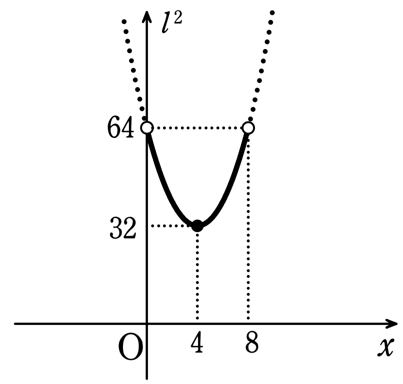
解 直角を挟む２辺のうちの一方の長さを x とすると，他方の長さは $8-x$ で表され，$x>0$，$8-x>0$ であるから

$\boxed{}$ ……①



また，斜辺の長さを l とすると，三平方の定理から

$$l^2=\boxed{}$$
$$=\boxed{}$$
$$=\boxed{}$$



よって，① の範囲の x について，

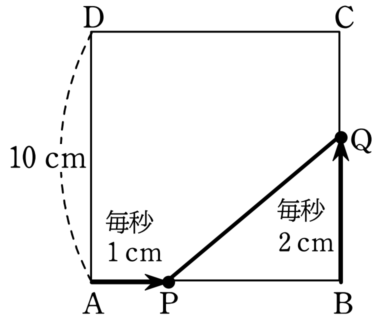
l^2 は，$x=\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる。

$l>0$ であるから，l^2 が最小となるとき l も最小となる。

ゆえに，l は，$x=\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる。

したがって，求める３辺の長さは $\boxed{}$ である。

練習 23　1 辺の長さが 10 cm の正方形 ABCD がある。点 P は A を出発して，辺 AB 上を毎秒 1 cm の速さで B に向かって進み，点 Q は，点 P と同時に B を出発して，辺 BC 上を毎秒 2 cm の速さで C に向かって進む。
Q が C に達するまでに P，Q 間の距離が最小になるのは，出発してから何秒後か。また，その最小の距離を求めよ。



研究　定義域の両端が動く場合の最大

例 1　a は定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$y=-x^2+4x \quad (a \leqq x \leqq a+2)$$

解説　$y=-x^2+4x$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$ である。
2 が定義域 $a \leqq x \leqq a+2$ の右外，内，左外のいずれにあるかで場合分けをする。

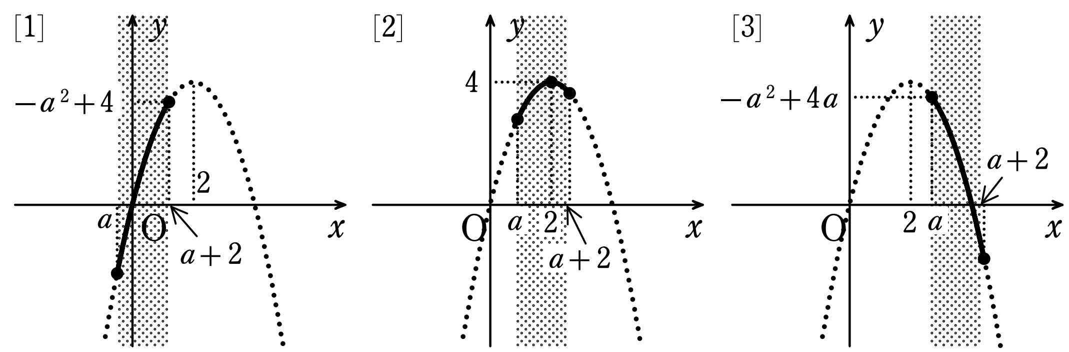
解　この関数の式を変形すると　$y=\boxed{}$　$(a \leqq x \leqq a+2)$

[1] $\boxed{}$ のとき
この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。
よって，$x=\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとる。

[2] $\boxed{}$ のとき
この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。
よって，$x=\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとる。

[3] $\boxed{}$ のとき
この関数のグラフは図 [3] の実線部分である。
よって，$x=\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとる。

答　$a<0$ のとき　$x=a+2$ で最大値 $-a^2+4$
$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=2$ で最大値 4
$2<a$ のとき　$x=a$ で最大値 $-a^2+4a$



【補足】例 1 を反復学習するための問題は，129 ページの演習問題 5 にある。