

第2章 無理数と証明

【授業実践例4】 自ら課題を発見し解決策を考えるなど、探究の段階に取り組む授業例である。

【学習のテーマ】 無理数と証明（教科書 p.66, 67）

【目標】

- ・「 $\sqrt{2}$ は無理数である」という既習事項から発展して、次の課題に取り組む。
 - ・ $\sqrt{2}$ のほかに、 $\sqrt{x}$ という形をした無理数を見つけ出す。
 - ・その数が無理数になることを証明する。
- ・互いに教え合ったり、発表したりすることを通じて、無理数であることの証明（背理法の原理）が、自分の中に今まで以上に深く身についたことを実感させる。
- ・授業を振り返って、このテーマに関して、十分に探究できたかどうか、まだ探究の余地がありそうか考えさせる。このテーマに関して更に探究したいと思える課題を発見させる。
- ・ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\pi}$ といったものは比較的思いつきやすい。更に、次の命題が真であることを予想し、証明するところまで行けるとよい。
 - ・ x が正の無理数のとき、 $\sqrt{x}$ は無理数である。
 - ・ p が素数のとき、 $\sqrt{p}$ は無理数である。

【授業の流れ】

① 課題の提示，説明	10 分	プリントの冒頭に示している「目標」を提示し，指導者が「 $\sqrt{2}$ は無理数」の証明を説明する。（既習の場合は説明を省略）
② 課題探究 (グループ学習)	20 分	4人くらいのグループに分かれて，課題に取り組む。まず，自分一人で考えてみる。そして，グループで互いの考えをまとめ上げ，協力しながら探究していく。
③ 発表	15 分	グループごとに探究の成果を発表する。
④ 振り返りカードへの記入	5 分	授業を振り返って，何が発見できたか，更に探究できる課題がないかを，文章で表現する。
合計	50 分	—

【プリント例の説明】

- ① 課題の提示，説明
 - ・冒頭に本時の課題を提示している。
 - ・左に「 $\sqrt{2}$ は無理数である」の教科書にある証明を掲載している。既習の場合は省略してよい。
 - ・右に「 $\sqrt{2}$ は無理数である」の素因数分解の一意性を用いた証明を掲載している。課題に取り組む際に，この証明が有効になる場面も想定される。事前に配布し，予習させておいてもよい。
- ② 課題探究（グループ学習）
 - ・再度，課題が提示してある。それ以外は記入スペースである。
 - ・記入スペースの使い方は学習者に任せるが，グループでの考えをまとめるのに模造紙やホワイトボードもあるとよいだろう。
- ③ 発表
 - ・発表用のプリントは特に用意していないが，②で清書したプリントをプロジェクタで投影して発表させるのもよいだろう。

■目標とする課題

- $\sqrt{2}$ のように、 $\sqrt{x}$ という形をした無理数がある。

 - ・ $\sqrt{2}$ のほかに、 $\sqrt{x}$ という形をした無理数を見つけ出す。
 - ・ その数が無理数になることを証明する。

■まず、命題「 $\sqrt{2}$ は無理数である」の証明を復習しよう。（教科書 p.67 応用例題 1）

応用例題 1 $\sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ。

【証明】 $\sqrt{2}$ は無理数でない、すなわち有理数であると仮定すると、1 以外に正の公約数をもたない 2 つの自然数 a, b を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

と表される。このとき

$$a = \sqrt{2} b$$

両辺を 2 乗すると $a^2 = 2b^2$ …… ①

よって、 a^2 は偶数、したがって、 a も偶数である。

ゆえに、 a は、ある自然数 c を用いて

$$a = 2c$$
 …… ②

と表される。② を ① に代入すると

$$4c^2 = 2b^2$$

すなわち $b^2 = 2c^2$

よって、 b^2 は偶数、したがって、 b も偶数である。

a と b はともに偶数であり、公約数 2 をもつ。

このことは、 a と b が 1 以外に正の公約数をもたないことに矛盾する。

したがって、 $\sqrt{2}$ は無理数である。

終

■「 $\sqrt{2}$ は無理数である」の証明法は他にもある。「素因数分解の一意性」を用いた証明法も見よう。

素因数分解の一意性：

n を 2 以上の自然数とする。 n の素因数分解は、積の順序を除けばただ 1 通りである。

素因数分解の一意性を用いた証明

【証明】 $\sqrt{2}$ は無理数でない、すなわち有理数であると仮定すると、2 つの自然数 a, b を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

と表される。このとき

$$a = \sqrt{2} b$$

両辺を 2 乗すると $a^2 = 2b^2$ …… ①

ここで、 a, b を素因数分解したものをそれぞれ

$$a = p_1 p_2 \cdots p_m \quad (p_1, p_2, \cdots, p_m \text{ は素数})$$

$$b = q_1 q_2 \cdots q_n \quad (q_1, q_2, \cdots, q_n \text{ は素数})$$

とし、① に代入すると

$$p_1^2 p_2^2 \cdots p_m^2 = 2 \cdot q_1^2 q_2^2 \cdots q_n^2$$
 …… ②

ここで、

② の左辺の素因数 2 の個数は 偶数

② の右辺の素因数 2 の個数は 奇数

である。すなわち、② の左辺と右辺で、素因数 2 の個数は一致しない。

これは素因数分解の一意性に反する。

したがって、 $\sqrt{2}$ は無理数である。

終

② 課題探究 (20 分)

*目標とする課題に取り組みましょう。

*まず、自分自身で考えてみましょう。

*そのあと、グループでお互いの考えを伝えあい、発表できるものに仕上げてください。

()組()番 名前()

■目標とする課題

- $\sqrt{2}$ のように、 $\sqrt{x}$ という形をした無理数がある。

 - ・ $\sqrt{2}$ のほかに、 $\sqrt{x}$ という形をした無理数を見つけ出す。
 - ・ その数が無理数になることを証明する。