

問題解決の授業は、生徒による「数学の探究」から始めよう

さかもと まさひこ
坂本 正彦

1. はじめに

平成 29 年告示の新学習指導要領及び解説でも、「数学的活動の一層の充実」が求められており、同時に、「数学的活動は、基本的に問題解決の形で行われる」ことが示されている。現行の「数学的活動とは、生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」とは表現が変わったが、「従来の意味をより明確にしたもの」と、引き続き数学的活動が求められている。それでは何故従来の意味を「より明確」にしなければならないのか。数学の教室では、生徒が目的意識をもって主体的に取り組む活動がなされていないからか。あるいは、「基本的に問題解決の形で行われ」「試行錯誤をしたり、資料を收集整理したり、観察したり、操作したり、実験したりすることなどの活動」が教室では実現されていないからなのか。問題解決の形を、「疑問や問いの発生、その定式化による問題設定、問題の理解、解決の計画、実行、検討及び新たな疑問や問い、推測などの発生と問題の定式化と続」かせていないからか。

今回の学習指導要領解説では、「資質・能力」の項に示された、「問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとする態度、多様な考えを認め、よりよく問題解決しようとする態度」の育成を主眼に置けば、数学科の授業では、知識伝達型の授業と決別し問題解決の中で数学的活動の充実を図るよう授業を構成し、展開せよという明確な主張が読み取れる。

2. 数学科における問題解決について

数学科の教室における問題解決過程は一つの定型に収まるわけではないが、敢えて中学校の数学の授業場面を想定しながら G. Polya の問題解決過程¹⁾を参考に捉え直してみると、概ね、

(1) 条件を整理する、(2) 仮説を立てる、(3) 仮説の妥当性を高める、(4) 帰納的・類推的に説明する、(5) 演繹的に説明する、(6) 解決過程を振り返り、知見にまとめる

となろう。このような生徒が主体的に活動する場面を、授業設計、授業展開の中に位置づけていくことが指導に当たる教師に求められることとなる。そのために何に焦点を当てるべきか。筆者は、生徒自身による課題とされる数学への探究だと考える。数学を探究する場面を思い出すとき、探究者は、必ず、探究結果を得るという明白な「目的意識をもち、主体的に」関わっている。これはまさに数学的活動そのものである。説明し合う活動（各自の探究結果を他者とすりあわせしながら精緻化する活動）や他への応用・活用（学んだことの価値を認識する活動）は、その次に来るべきものである。即ち、数学的活動の実現には、対象となる数学が、授業の中で生徒にとっての探究の対象となるように設定されなければならない。

また新学習指導要領では、その前文に教育基本法が引用され、数学科の授業においても、「人格の完成」が目指されるべきことが示された。一方、数学教育において問題解決の重要性が示されたのは、昭和 22 年の学習指導要領（試案）から、現代学習指導要領の編纂まで関わった

和田義信による。和田は、数学教育からみた望ましい人間像として、

- (1) ひとりになりきれ人間
- (2) ものごとを創造し続けるとともに、自分のことが分かる人間
- (3) 反省的思考を身につけた人間

の3点を挙げた。そのために「学習は広義の問題解決 (Problem Solving) という行動の方をと」り、それは、「単に子どもが自ら計画を立て、興味をもって活動するのに都合がよいというだけでなく、そういう経験が、やがて、人生として必要な基本的訓練となるのだということを理解しなければならない」点にあることを強調する²⁾。即ち、戦後数学教育は人格の完成を目指すためになされ、その為に問題解決を通して学習させることが示されたのである。また数学の学習が「人生として必要な基本的訓練」であるならば、その意図を達成するための配慮は不可欠で、教材選定、教室環境の整備、授業展開方法の検討は必須となる。

3. 問題解決のための題材と展開例

問題解決のための題材選択では、古典の参照が授業展開の幅を広げてくれることがある。

中学校3年では、円の発展的内容として、「方冪の定理」が扱われる。証明は三角形の相似条件によることが多いが、Euclid 原論では、三平方の定理を用いて証明される。何故か。原論の構成から見ると、方冪の定理は、原論全13巻中、第3巻の命題35-37にあり、三平方の定理(第1巻命題47)は証明済みだが、三角形の相似条件(第6巻命題4-6)はまだ証明されていない命題だからである。よって三平方の定理を学んだ中学3年生にとって、方冪の定理が成り立つかどうかは、新たな探究課題として位置づけられる。

Euclid 原論では、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad \cdots \textcircled{1}$$

の両辺に PO^2 を加えた式を作り、それを証明する。技巧的であるが、そもそも弦 AB と弦 CD の間には、何の関係も無いために、それを関係づけるために、 $PA \cdot PB$ と $PC \cdot PD$ の互いの関係を A と C の唯一共通の関係である円の半径、即ち OA, OC に帰着させることを目標として考案されたと推測できる。

しかし、 $\textcircled{1}$ の両辺に PO^2 を加えなくても、三平方の定理を用いて証明は可能である。

[証明]

左辺 $= PA \cdot PB$

$$\begin{aligned} &= (PE + EA) \cdot (EB - EP) \\ &= PE \cdot EB + EA \cdot EB - PE \cdot PE - EA \cdot PE \\ &= PE \cdot EB + EB \cdot EA - PE \cdot PE - EB \cdot PE \\ &= EB^2 - PE^2 \\ &= (OB^2 - OE^2) - (OP^2 - OE^2) \\ &= OB^2 - OP^2 \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= PC \cdot PD \\ &= OD^2 - OP^2 \end{aligned}$$

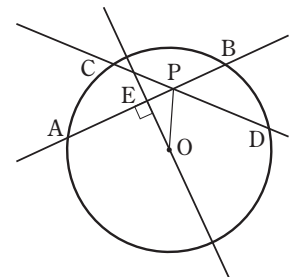
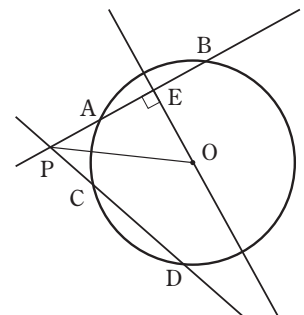
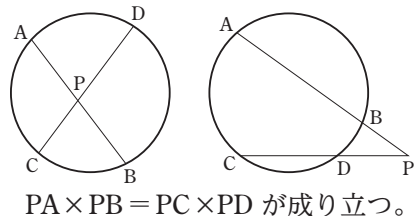
故に、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

[Q.E.D.]

この証明方法は、円 O の外部に点 P があるときにも適用できる(証明は省略)。

方冪の定理



以前、方冪の定理に関する大学入試問題を調べたとき、求値問題（即ち、知っているかどうかを問う問題）として出題されているに過ぎないことが分かった。しかし方冪の定理には、もっと重要な役割がある。

古代ギリシア人で数学集成 Collection を編纂した Pappus of Alexandria は、接触 Tangencies の問題を取り上げている。数学集成の中で、Pappus は Apollonius of Perga の問題「任意に与えられた 3 円に接触する円を作図せよ」を改変し、10 題の問題を提示する³⁾。

(1) 任意に与えられた 3 点に接触する円を作図せよ。

(2) 任意に与えられた 2 点と 1 直線に接触する円
を作図せよ。

(3) 任意に与えられた 1 点と 2 直線に接触する円
を作図せよ。

(4) 任意に与えられた 3 直線に接触する円を作図
せよ。

（以下、[1 円, 2 点], [1 円, 1 点, 1 直線], [1 円,
2 直線], [2 円, 1 点], [2 円, 1 直線], [3 円] と続く）

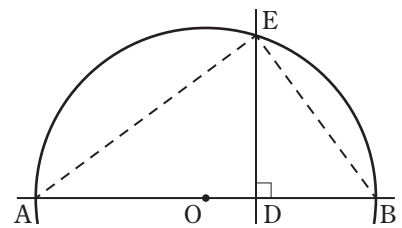
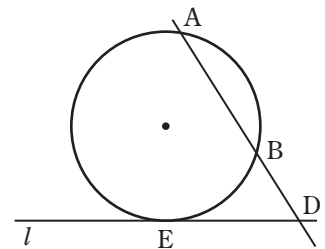
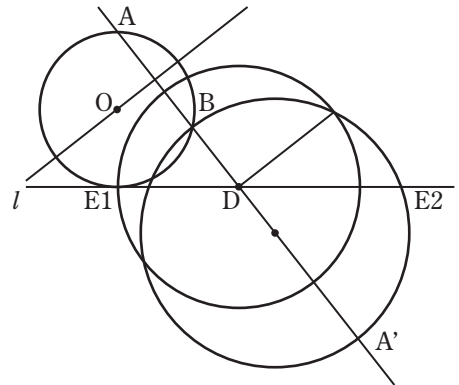
接触の課題では、(1) は、3 点が一直線上にない場合は三角形の外接円の作図に他ならない。(2) は、与えられた 2 点と 1 直線から、求める円周上に来る第 3 の点を作図することによって、(1) に帰着させることを考える（右上図）。同様に (3) は、求める円周上に来る第 2 の点を作図することによって、(2) に帰着させることを考える。即ち、数学は、命題間の関連づけを行うことによって体系化されていることを学ぶ。また Pappus は、古代ギリシアの「解析 Analysis」の考え方（現代数学でいう解析学とは異なる）、即ち、「まだ分かっていないものを、分かったものとして考察する」という考え方の習得を目的としたといわれている。

(2) の課題は、どのように達成されるのか。解析の考えでは、まだ分かっていないもの、即ち、求める円が描けたとして考察を始める（右図）。この図から方冪の定理の関係、即ち、

$$AD \cdot BD = ED^2$$

が見いだせたならば、線分 AD, BD から ED を作図すれば良いことになる。これは、比例中項の作図により実現できる（右図）。AD+BD を直径とする円 O に点 D から垂線を立て、円 O との交点を E とすると、 $AD \cdot BD = ED^2$ が成り立つ。よって、線分 AD, BD を下に右図を作図すれば、ED が得られる。これが、(2) の点 E を求める長さ DE となる。

Pappus は、方冪の定理と比例中項の作図とを結び付けることにより、Apollonius の課題を改変した 10 個の作図問題を考察させたと考えられる。比例中項の作図（これも円周角の定理の特殊な場合：直径に立つ円周角は直角）に潜む数式と方冪



の定理を表す数式とが等価であることを拠り所として、Pappus の接触の課題は、中学生にも探究の対象として位置づけることが可能となる。

Pappus の接触の課題は、問題解決の対象として少々骨は折れるが、達成感のある課題となる。Seymour A. Papert が Mindstorms の中で “Hard, but, Fun!” と記したように⁴⁾、一見解決不可能に見えるような課題を、生徒の実情に応じて、適切な示唆を与えながら問題解決させることで、生徒は、主体的に取り組んだことに対する充実感を覚えるだろうし、解決のあかつきには達成感を得ることになる。大切なことは、教師が生徒に安易にヒントを与えるのではなく、G. Polya の問題解決段階にあるように、何が問題なのか、分かっていることは何か、解決の方針はどうしたら良いかに根気よく取り組ませることにある。

4. 結語

「数学的活動は、問題解決によって実現すること」を日々の授業の中で達成していくことが数学教師にとっての重要な課題である。数学の授業では、それぞれの生徒が目的意識をもって、主体的に探究に取り組めるように授業設計し、授業展開するよう、教師は個別の生徒のことをよく知らなければならないし、教材研究に努めなければならない。ある数学の命題は、証明できれば終わりではなく、一つ証明が成された時点から教材としての価値をもち始める。問題解決のためにはどのような視点があり得るのか、教材研究の段階で教師がどれだけ深く探究できるのか、問題解決の授業の成功不成功はここにかかってくる。

教師が一通りの解法しか知らなくとも、生徒が教師の意図しないアイデアに気づくことはしばしばある。ただ生徒はいつでも正解にたどり着けるように考えをまとめられるわけではない。まだ成功していないアイデアを不勉強な教師が否定したとしたら何という悲劇であろうか（かつて「先進校」での研究授業でそのような場面を目撃した）。そうならないために、教師は教材研究に努めるべきだと思う。教材研究は、教師の数学に対する教養を深めることだけでなく、生徒の未分化な発言を価値付け、学びの方向性を示すことにより価値がある。よって教材研究は、教室での目的意識をもった個々の生徒の主体的な探究活動につながる。問題解決の授業は、そのような地道な準備に支えられているのである。

引用・参考文献

- 1) G. Polya(1945), 柿内賢信訳 (1954), いかにして問題を解くか, 丸善出版.
- 2) 和田義信 (1997), 和田義信著作・講演集 1, 東洋館出版社, pp.63–82.(初出: 数学教育概論 I (1953), II (1954), 吉野書房.)
- 3) Ivor Thomas(1941), Greek Mathematical Works, Volume II: Aristarchus to Pappus, Harvard University Press.
- 4) S. A. Papert(1980), Mindstorms: Children, Computers, And Powerful Ideas, Basic Books.

(常葉大学 准教授)

新しい学習指導要領における数学的活動をいかに実現するか

なかがわ ひろゆき
中川 裕之

1. 新しい学習指導要領における数学的活動～プロセスの重視～

新しい学習指導要領において「数学的な見方・考え方」は、教科の目標や評価の観点ではなく、数学という教科の特質に応じた物事を捉える視点や思考の進め方、方向性を意味するものとなり、「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、根拠を基に筋道を立てて考え、統合的・発展的に考えること」と定義されました。そして、数学的な見方・考え方を働かせて行われる数学的活動も、数学的に問題を発見し、解決する過程と位置付けられています。その結果、数学的活動の定義は、従来の「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」という活動の内容を示したものから「事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」という問題発見、解決のプロセスを示したものに変わりました。

さらに、数学的活動を集約する3つの観点も、次のようにプロセスを具体的に示したものに変わりました（次のものは中学校第2、3学年のもの）。例えば、現行の学習指導要領においてアの活動に相当するものは「日常生活や社会で数学を利用する活動」と活動の内容が示されていたのに対して、新しい学習指導要領ではどのような活動をすればよいのかといったプロセスが明確にされています。

- ア 日常の事象や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決したり、解決の過程や結果を振り返って考察したりする活動
- イ 数学の事象から見通しをもって問題を見だし解決したり、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察したりする活動
- ウ 数学的な表現を用いて論理的に説明し伝え合う活動

これらの変更からは、新しい学習指導要領が学習や問題発見・解決のプロセスを重視していることがうかがえます。

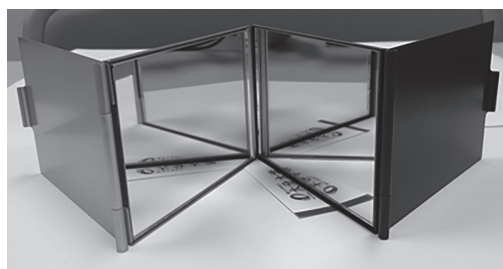
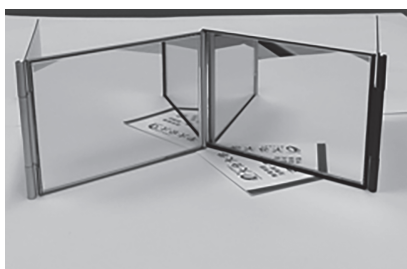
では、新しい学習指導要領が意図するような数学的活動を授業において実践しようとするとき、どのような思考や活動を想定して授業を構想すればよいのでしょうか。本稿では、そのことについて具体的な場面をあげて考えてみたいと思います。

2. 事象の数学化その1

平成29年度の全国学力・学習状況調査の数学Bでは、第一問に万華鏡の問題が出題されています。中学校の先生方からはB問題の一問目で様々な模様が出てきて生徒が戸惑っていたという感想を多く聞きました。その問題は日常事象を対称性から捉えることを意図したものですので、文部科学省としてはそのような問題や事象を数学の授業で扱ってほしいと考えている

と思われます。それに対して先のような感想が聞こえてくるということは、あまりそのような授業が実践できていないということではないでしょうか。そこで、ここでは、2枚の鏡に映る像を題材として、新しい学習指導要領で意図した数学的活動を実現する授業について考えたいと思います。

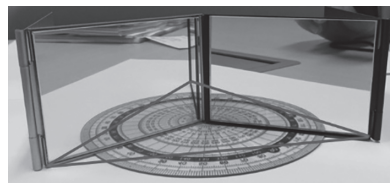
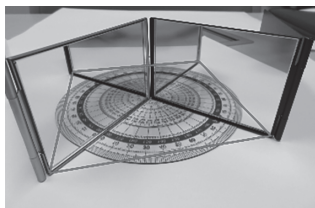
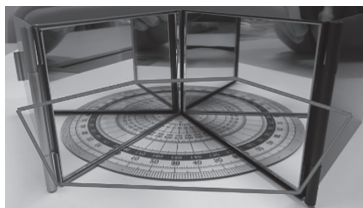
2枚の鏡を組み合わせ、そのなす角を小さくしていくと、鏡の中に複数の鏡が現れてきます。角度を変えると鏡に映る像は変化していきますので、どのような規則で変わっていくかを明らかにしたいと思います。



そこで、この場面を数学的に扱うことを考えたいのですが、このままでは数学が使えません。「日常の事象を数理的に捉えること」を考える必要があります。このような数学化では、数量や図形などに着目して事象の特徴を捉えることが大切です。ここでは、既に「鏡のなす角の大きさ」という数量が出てきていますが、鏡に映る像をどのように捉えるべきかが明確になっていません。そのため、下の図のように「鏡の端を結んだ図形」として鏡に映る像の特徴を捉えることにします。事象の数学化の仕方は多様ですので、この捉え方が絶対ではありませんが、ここでは、一応このように捉えて問題を設定してみます。

数学化した問題：鏡のなす角と鏡の端を結んだ図形にはどのような関係があるだろうか。

このように数学化した問題を設定できれば、教科書にあるような問題と似てきます。ここで必要となるのは、目的に応じて式、図、表、グラフなどを活用して数学的に処理する能力です。ここまでくれば、多くの生徒が様々な角度の場合を調べて表に整理すれば関係が明らかになるはずと見通しを立て、問題を解決できるのではないのでしょうか。

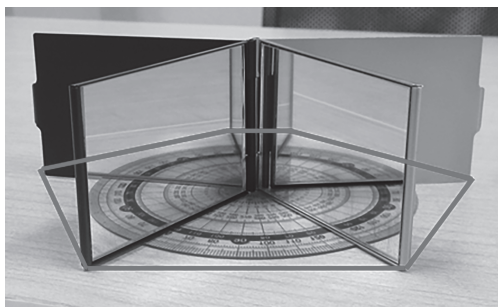


実際にやってみると、 60° の場合には正六角形、 90° の場合には正方形、 120° の場合には正三角形ができます。その結果から、(鏡のなす角の大きさ) $\times$ (正多角形の辺の数) $=360$ という関係が見つかります。つまり、なす角の大きさと辺の数には反比例の関係があることを見いだせます。そして、関係が見つかり、正五角形をつくるには鏡のなす角を 72° にすればよいといったように、実際につくってみなくても図形から鏡のなす角を求めることもできるようになります。

3. 事象の数学化その2

このように考えてくると、鏡のなす角と鏡に映る像の関係が明確になったと思うかもしれませんが、しかし、よく考えてみると、正多角形の辺の数は自然数ですから、鏡のなす角の大きさが 360° の約数の場合しか解決できないことになります。つまり、鏡のなす角が 360° の約数ではない場合、例えば、 70° のときの鏡に映る像、つまり鏡の端を結んだ図形は求めることができないのです。

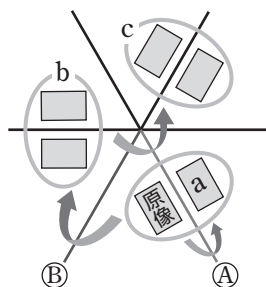
72° のときには正五角形、 60° のときには正六角形になるので、その間に正多角形は存在しないはずです。では、 70° の場合にはどんな図形になるのでしょうか。いろいろと想像してみるのも楽しいのですが、ここでは、なす角を 70° にしてどんな図形になるかを実際に確かめてみたいと思います。すると、右のように、いびつな六角形になることが分かります。つまり、正多角形にならない場合があるのです。しかし、なぜこのような図形になるかが分かりません。



そこで、もう一度、今度は別の数学の概念を用いて数学化を行ってみたいと思います。そもそも鏡の端を結んで多角形ができるのはなぜなのでしょう。その理由を明らかにするには、元の対象（原像）と鏡に映る像の関係を探る必要があると考えます。そこで、「図形の移動」という数学の概念を使ってこの事象を捉えることを考えると、次のように数学化した問題を設定できます。

数学化した問題：鏡に映っている像は、原像がどのように移動してできたものか。

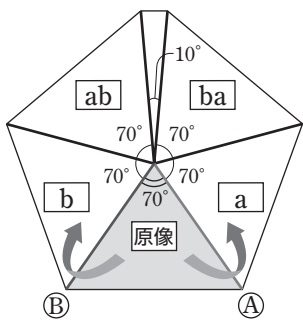
原像と鏡に映る像の関係を調べるために、鏡のなす角が 60° の場合で、次のように鏡の前に対象物（付箋）を置いてその移動を分析してみます。



付箋は鏡の中に5つ映っています。この場面の移動での捉え方には様々なものが考えられますので、ここではその1つを取り上げてみたいと思います。まず、鏡①によって原像はaに移ります。その際の移動は対称移動です。そして、原像とaをセットとし、そのセットの移動を考えると、今度は鏡②によってbのセットに移ります。これも対称移動です。すると、最後にcのセットが残りますが、これはbのセットが鏡①によって対称移動したとみなすことができます。つまり、5つの像のでき方は対称移動によって解釈できます。

そこで、鏡のなす角が 70° の場合も対称移動で解釈することを試みます。 70° の場合の図形は次のようになります。鏡は①と②の2枚だけですので、それらの鏡を軸として対称移動す

ることを考えます。ここでは、原像を鏡の間のスペース（頂角 70° の二等辺三角形）とすると、**原像**は鏡①によって**a**に移動します。また、鏡②によって**原像**は**b**に、**a**は**ab**に移動します。さらに、**b**は鏡①によって**ba**に移動します。もちろん、**ab**も鏡①によって、**ba**も鏡②によってさらに対称移動するのですが、それらは自分自身と重なってしまい、視覚的にほとんど現れず、その一部が頂角 10° の二等辺三角形として現れるのみです。



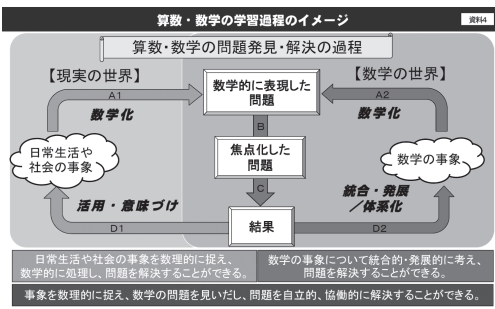
このように事象を対称移動から捉えると、いびつな六角形ができる理由が明確になります。そして、最初に考えた正多角形となる場合は対称移動によって重なる部分が出ない場合であったと解釈できます。

4. おわりに

本稿では、まず、2枚の鏡の映り方を考察する中で、鏡のなす角の大きさと鏡に映る像の関係を探りました。そこでは、鏡に映る像を数学的に捉えるために、鏡の端を結んでできる図形とみなしました。そうした数学化により、数学的な手法を用いて処理することが可能となり、正多角形になる場合について関係を明確にしました。しかし、正多角形にならない場合についての疑問が生じたことから、別の数学化を行い、図形の移動といった数学的な概念に基づいて事象を考察し、鏡の端を結ぶと多角形ができる理由を明確にしました。

新しい学習指導要領で意図されている数学的活動を授業で実現するには、まずはその具体的なイメージを持つことが重要です。そのため、本稿では一例ですが、具体的な教材や活動を示し、数学的活動について考察してきました。

数学的活動を捉えるイメージとしては、右のような図が文部科学省から出ています。数学的活動を実現するには、日常生活や社会の事象の数学化の過程を授業に含めることが大切となります。ここでは、事象をどうやって数学の舞台にのせるかがカギとなります。授業では教師が数学化を一方的に行うのではなく、生徒と話し合って様々な数学化の仕方を試すような活動も考えられるでしょう。また、図では数学的活動がサイクルの形で示されており、本稿で数学化を2回行ったように、事象を解明するために数学的活動のサイクルを何周かすることも想定されています。



そのような活動を実現する教材や授業の開発が期待されているのです。難しいことではありますが、本稿で示した例を参考に、そのような授業が構想、実践されることを願っております。

引用文献

中央教育審議会算数・数学ワーキンググループ (2016) 「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ」

(大分大学 准教授)

「統合的・発展的に考える」という視点から 次の時代の数学科授業を考える

ふなはし ゆか
舟橋 友香

1. 次期学習指導要領における「数学的な見方・考え方」

平成 29 年 3 月に次期学習指導要領が告示され、6 月には学習指導要領解説も文部科学省のホームページに掲載され、いよいよ時代の大きな転換点を迎えるようとしています。今回の改訂では、すべての教科の教科目標に「見方・考え方を働かせ」という言葉が冒頭に位置づけられている点に特徴があります。この「見方・考え方」は、答申の中で「どのような視点で物事を捉え、どのような考え方で思考していくのか」という、物事を捉える視点や考え方」(p.33)とされ、各教科等における学びの過程の中で鍛えられていくものだと説明されています。すなわち、「見方・考え方」はそれ自体が幼児期から小学校、中学校、さらに高校、大学へと成長していくものとして位置づけられているところに従来との決定的な違いがあります。従って、子ども達はそれまでに経験してきたことの中にこれから新たに学ぶ内容に通じる見方・考え方を持っているのであり、教師はそれを見落とさずに引き出し、新たに学ぶ内容を位置づけていくことが求められてきます。

では中学校数学科で育成を目指す「見方・考え方」とはどのようなもののでしょうか。学習指導要領解説において、中学校数学科における「数学的な見方・考え方」とは、「事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること」と整理されています(p.21)。特に、「今回の改訂では、統合的・発展的に考えることを重視している」(p.21)とあります。そこで本稿では、この「統合的・発展的に考える」というキーワードに焦点をあて、「統合的・発展的に考える」とどのように数学の世界が広がっていくのか、中学校数学科における具体例を通して考えてみることにします。

2. 「統合的・発展的に考える」という視点で素材を見直す

現行の「中学校学習指導要領解説 数学編」(文部科学省、2008)の中学校第3学年「A 数と式」領域には、「(2) 文字を用いた簡単な多項式について、式の展開や因数分解ができるようにするとともに、目的に応じて式を変形したりその意味を読み取ったりする能力を伸ばす」という項目があります。この下位項目の「ウ 文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明すること」に関わる具体例として、「連続する二つの偶数の積に1をたすと奇数の2乗になる」ことを説明する場面が挙げられています。この具体例は、次期学習指導要領解説でも掲載されています(pp.138-139)。現行の解説と異なる部分は、想定される学習過程に関する説明の中で、文字を用いた式で説明することで「簡潔・明瞭・的確に表現」できることを指摘している点、及びこの具体例が「証明を読んで新たな性質を見いだすこと」と関わる内容であり、「統合的・

発展的に考える力を養うために必要なものである」ことを指摘している点です。解説の中では、 $2n(2n+2)+1=(2n+1)^2$ という式の変形を振り返り、「奇数の 2 乗」という部分が「二つの偶数の間にある奇数の 2 乗になる」ということを見出すところで探究が終わっていますが、「統合的・発展的に考える」ことを以下のようにさらに進めていくことができます。

(1) 具体的に考えてみる

本稿では、「連続する二つの偶数の積に 1 をたすと、どのような数になるか」という問いからスタートしたいと思います。まずは、問われた場面を具体的に考えてみることから始めます。例えば、自然数の中で一番小さな偶数は 2 なので、2 から順に問われた場面を書いてみます。

$$2 \times 4 + 1 = 8 + 1 = 9$$

$$4 \times 6 + 1 = 24 + 1 = 25$$

$$6 \times 8 + 1 = 48 + 1 = 49$$

9, 25, 49 という数から、連続する二つの偶数の積に 1 をたした数は、平方数であることが見えてきます。さらにそれは連続する二つの偶数の間にある奇数の平方ということが分かります。

(2) 発見したきまりがいつでも成り立つか

そこで、帰納的に発見したきまりが一般的に成り立つことを文字を用いて証明していきます。まず、二つの連続した偶数は、自然数 n を使って次のように表されます。

$$2n, 2n+2$$

この二つの連続した偶数の積に 1 を加えると、

$$\begin{aligned} 2n(2n+2)+1 &= 4n^2+4n+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ &= (2n+1)^2 \end{aligned}$$

となります。 n は自然数ですから、二つの連続した偶数の積に 1 を加えると、その間の奇数の 2 乗になります。

(3) 「1 をたす」とは何をしているのか

ところで、はじめに問われた場面では、「1 をたす」という操作がありますが、これに少々不自然さを感じます。そこで、「1 をたす」ことの意味を考えてみましょう。そのために、「1」を自然数 a に置き換えると、二つの連続した偶数の積に a を加えることは、②の式で表されます。

$$2n(2n+2)+a=(2n)^2+2n \cdot 2+a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

先ほどの結論では、②の式を整理すると平方数となっていました。したがって、②の式も $2n$ の 2 乗の項に着目すると b をある自然数として $(2n+b)^2$ となるはずですが、この式を展開すると、

$$\begin{aligned} (2n+b)^2 &= (2n)^2+2 \cdot 2n \cdot b+b^2 \\ &= 2n(2n+2b)+b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となります。③で得られた式と①の式の係数を比較してみましょう。すると、次の二つのことが見えてきます。一つは、「1 を加える」と言っていた「1」は「 b^2 」つまりある自然数の 2

乗であったこと、もう一つは、二つの連続した偶数のうち後者を表す「 $2n+2$ 」の「2」は「 $2b$ 」つまり2にある自然数をかけたものであったということです。後者のことについてさらに考えてみると、「二つの連続した偶数」と「その間の奇数」という関係を発展させて捉えることができます。「二つの連続した偶数」と「その間の奇数」は小さい順に「 $2n, 2n+1, 2n+2$ 」となりますが、③の式ではこれに対応した部分が「 $2n, 2n+b, 2n+2b$ 」となります。つまり、はじめの場面では連続する自然数を考えていたために b が1であったけれど、三つの数の間隔 b は1に限らず自然数の範囲であればどんな値でもよいことが分かります。(図1)

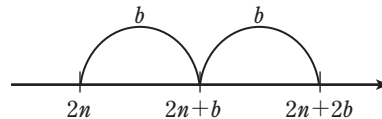


図1 $2n, 2n+b, 2n+2b$ の関係

(4) 「偶数」からはじめなくてもよいのではないか

上述の考察から、「二つの連続する偶数」とその「間の奇数」という三つの自然数に限らず、それらの間隔が等間隔であればよいことが分かりました。すると、数の間隔が等しいことがこの問題の本質ならば、はじめの数は「 $2n$ 」すなわち「偶数」でなくてもよいのではないかと考えます。そこで、自然数 s, t を用いて、はじめの自然数を s 、間隔を t とおくと、三つの自然数は「 $s, s+t, s+2t$ 」と表すことができます。(図2)

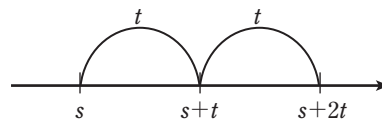


図2 $s, s+t, s+2t$ の関係

このとき、 s と $s+2t$ の積に間隔 t の2乗を加えた数は、

$$\begin{aligned} s \cdot (s+2t) + t^2 &= s^2 + 2st + t^2 \\ &= (s+t)^2 \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

となり、中央の自然数の2乗になることが分かります。実際、はじめの自然数が3、間隔が5である三つの自然数「3, 8, 13」では、 $3 \cdot 13 + 5^2 = 39 + 25 = 64 = 8^2$ となり、中央の自然数8の2乗になります。

(5) 自然数の範囲に限らなくてもよいのではないか

④の式では、 s と t は自然数としていましたが、式を読むと、自然数の範囲に限らず、実数の範囲に広げても成り立つことが分かります。例えば、はじめの数が0.3、間隔が0.2である三つの数「0.3, 0.5, 0.7」では、 $0.3 \cdot 0.7 + 0.2^2 = 0.21 + 0.04 = 0.25 = 0.5^2$ となり、中央の数0.5の2乗になります。また、はじめの数が $\frac{1}{3}$ 、間隔が $\frac{1}{2}$ である三つの数「 $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}$ 」では、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{25}{36} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

となり、分数でも同様に成り立つことが確認できます。具体例は省略しますが、 s や t が負の場合も同様に考えることができます。

上述の「連続する二つの偶数の積に1をたすと、どのような数になるか」という問いからスタートした探究について、「統合的・発展的に考える」過程を振り返ってみましょう。まず、具体的ないくつかの事例から、それらを統合して捉える視点「連続する二つの偶数の積に1をたすと、その間にある奇数の2乗になる」ということを見出しました。そして、見出した事柄がいつでも成り立つことを、文字を用いた式によって証明しました。次に、「1をたす」という部分に着目し、これが問題の構造をどのように規定しているのか、文字を用いた式の意味を解釈することにより発展的に考察しました。その結果、「三つの自然数が等間隔であること」が問題の本質であり、間隔は「1」だけでなく自然数全体で成り立つことを見出しました。さらに、はじめの数は偶数に限らず任意の自然数で成り立つことを文字を用いた式により確認し、その式を読むことで、最終的に実数まで範囲を広げても成り立つことが明らかになりました。すなわち、「ある実数 s とそれと $2t$ 離れた実数 (t : 実数) の積に間隔 t の2乗をたすと、その間にある実数 $s+t$ の2乗になる」という、はじめの問題場面と新しく見出したものとを統合的に捉える視点が得られました。

3. おわりに

本稿では、次期学習指導要領で示された数学科の目標のキーワードである「統合的・発展的に考える」ということはどのようなことか、既に現行の学習指導で扱われている素材を用いて考えてきました。その過程では、不自然さを感じてどうなっているのか考えてみようとする気持ち、もっと広い範囲でも成り立つことを考えようとする気持ちが、探究を進展させる大きな契機となっていました。このような、言わば「思考や行為を改善し続けてやまない傾向」(文部省, 1951)をいかに日々の数学科の学習指導の中で育成していくか、これが次の時代の数学科授業を考える上での課題と言えるでしょう。

引用・参考文献

- 中央教育審議会 (2016) 幼稚園, 小学校, 中学校, 高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について (答申).
- 文部省 (1951) 小学校学習指導要領 算数科編 (試案).
- 文部科学省 (2008) 中学校学習指導要領解説 数学編, 教育出版.
- 文部科学省 (2017) 中学校学習指導要領解説 数学編.

(奈良教育大学 准教授)

Studyaid D.B.

徹底活用術

いよいよ入試本番。
そこで今回は Studyaid D.B. を
活用した、入試対策の授業を
コーディネートします。

今回使う Studyaid D.B. の特長

入試対策といえば、やはり「過去問」ではないでしょうか。そこで入試問題を収録している「中学数学 2017 データベース」を使って入試対策授業を実践していきましょう。
まずは今回使う Studyaid D.B. の特長をご案内します。

● 入試対策プリントがさらに充実した「実用 PrinT 例集」

プリント作成システムには「実用 PrinT 例集」と呼ばれるレディ・メイドのプリントを収録しています。全国の過去問に加え、新たに「直前演習」や「頻出問題」をまとめたプリントを収録しました。

● プレゼンテーションシステムを搭載！

「プリント作成システム」に加え、新たに授業で使える「プレゼンテーションシステム」を搭載しました。

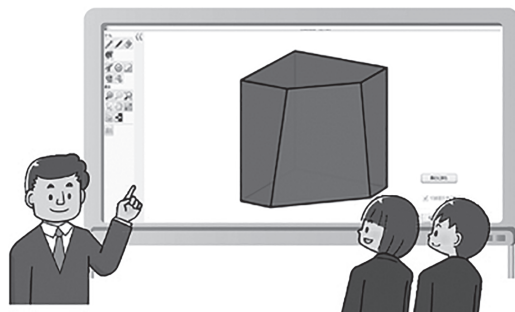


それではこれらの特長を活用して、入試対策プリントを
解説する授業を実践していきましょう！ と、その前に…

プレゼンテーションシステムって何？

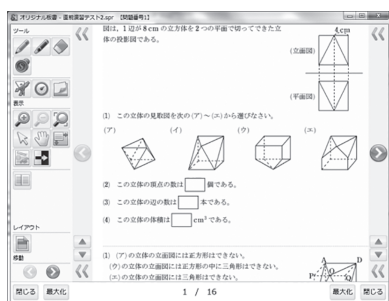
Studyaid D.B. のデジタル教科書で採用されているシステムで、電子黒板やスクリーンに、アニメーションコンテンツなどを投影しながら、ペンなどで書き込みを行って、学習内容の解説を行うことができます。

※「中学数学 2017 データベース」には教科書紙面は収録していません。



映し出すだけでも意味がある

問題文や図形などの板書時間を短縮できる分、たっぷり解説に時間が使えます。



自作の教材も大きく表示！（オリジナル板書機能）

プリント作成システムで作成された PrinT ファイルや、Word、－太郎などのファイルも、プレゼンテーションシステムで表示することができます。

特に PrinT ファイルは、一問ずつ表示したり、解説だけを表示したりと、様々な見せ方を簡単に行うことができます。



それでは始めていきます。
まずはプリント作成システムを活用します。



準備 1

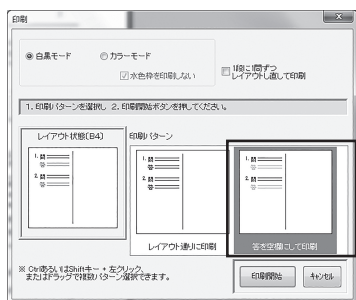
授業で使う入試対策プリントを用意しましょう

① 「実用 PrinT 例集」 から、生徒に配布したい入試対策用プリントを選びます。



▲ 選ぶだけでプリントが完成！

② 印刷します。



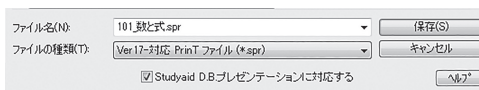
▲ 演習プリントは「答を空欄にして印刷」

③ 名前を付けて保存します（※）。



※ PrinT ファイルをプレゼンテーションシステムで開くには…

プリント作成システムで作成した PrinT ファイルには、「*.prt」と「*.spr」の2種類の形式があります。プレゼンテーションシステムでプリントを使用するには、「*.spr」形式で、また「プレゼンテーションシステムに対応する」にチェックを入れて保存する必要があります。



▲ 「名前を付けて保存」画面



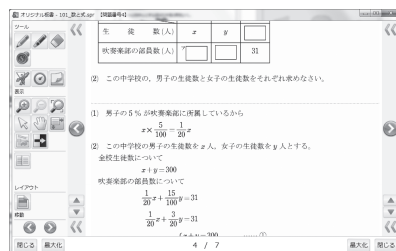
ここからはプレゼンテーションシステムを活用していきます。

準備 2 解説用にプリントを加工しましょう

① プレゼンテーションシステムの「オリジナル板書」機能でプリントを開きます。

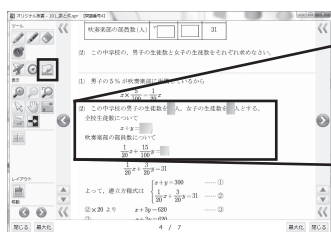


▲ 解説用は「問+解説」がオススメ



② 「ブラインド」機能で要点などを隠しておきます。

「ブラインド」機能とは、表示画面を部分的に隠す機能です。貼ったブラインドは、クリック（タップ）で簡単にめくることができます。



(2) この中学校の男子の生徒数を 人、女子の生徒数を 人とする。
全校生徒数について
$$x + y = \text{$$

吹奏楽部の部員数について
$$\frac{1}{20}x + \frac{15}{100}y = \text{$$

お好みの色・大きさのブラインドを、好きな場所に好きなだけ貼ることができます。

授業 生徒が問題を解き終わったら、プリントの解説を行いましょう

プレゼンテーションシステムに搭載されている、授業で使える機能の一部を紹介します。

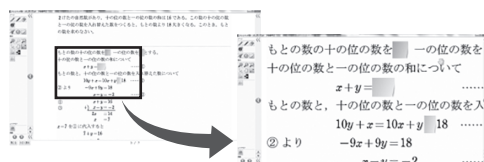
書き込み

ペンやマーカー、スタンプ機能などで、自由に書き込むことができます。



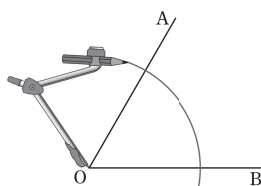
部分拡大

部分的に大きく見せることができます。



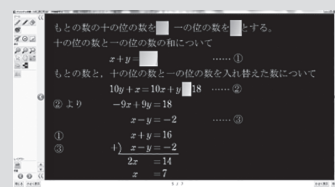
教具

作図問題で使えるコンパスなどの教具を搭載しています。



白黒反転

コンテンツなどの色を白黒反転して表示できます。
黒板に直接投影した時に文字が見やすくなります。



他にもプレゼンテーションシステムには日常学習で使えるコンテンツを多数収録しています。日々の授業にぜひご活用ください。



原稿の募集について

本誌は、数学教育に携わる先生方への情報提供または先生方どうしの情報交換の場となることをねらいとした小冊子です。

以下の要領で、皆様からの原稿を広く募集しております。

① 募集原稿の内容

原稿は、オリジナルかつ未発表のものに限ります。

数学教育に関する内容であれば、テーマの選択は自由です。

② 執筆要領

(1) Word 用のひな形を、弊社ホームページよりダウンロードしていただけます。

(2) 原則、1 人の方に 3 ページを配当いたします。

1 ページ目はタイトルを除いて 左右 42 字× 29 行

2, 3 ページ目はそれぞれ 左右 42 字× 36 行

分数は 2 行分と数えてください。

(3) 図版は、弊社で作成するための情報をお書き添えください。

写真は、元データを一緒にお送りください。

(4) 他書からの引用がある場合は、原文の該当部分のコピーを原稿と一緒にお送りください。

本誌ページ数の関係から、掲載量には限りがありますので、原稿選択および掲載時期の決定は弊社で行わせていただきますことをご了承ください。

掲載が決定した時点で連絡させていただきます。

詳しくは、弊社ホームページをご覧ください。

トップページ右上の

▶ 編集部より

原稿送り先

〒 604-0861

京都市中京区烏丸通竹屋町上る

大倉町 205 番地

数研出版株式会社 関西本社

第一編集部 中学通信誌係

編集後記

少し前にご縁あってお会いした、とある中学校の先生。もうベテランの域に達する年代の方でしたが、変化を厭わず、つねに新しいものを授業に取り入れ続けたいとおっしゃる姿に刺激を受けました。

その昔、C までしかなかったという体操競技の技の難度は、いまや H (男子) や I (女子) まで上がっているそうです。ここまで難度を引き上げたのも、(もちろん器具やトレーニング技術の進歩も要因でしょうが、) 選手たちのチャレンジ精神によるところが大きいのではないのでしょうか。

これを書いている 2017 年 11 月。教材のつくり手という立場の私にとって、新課程はもう始まっているようなものです。各界の挑戦者たちのように、意識を高くもっていたいと思います。 (C)