$$s_\varDelta{}^{(7)}=\sum_{i=0}^{p_1-1}\sum_{j=q_2}^{q_3-1}m_{ij}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j),\quad S_\varDelta{}^{(7)}=\sum_{i=0}^{p_1-1}\sum_{j=q_2}^{q_3-1}M_{ij}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j),$$

$$s_\varDelta{}^{(8)}=\sum_{i=p_1}^{p_2-1}\sum_{j=q_2}^{q_3-1}m_{ij}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j),\quad S_\varDelta{}^{(8)}=\sum_{i=p_1}^{p_2-1}\sum_{j=q_2}^{q_3-1}M_{ij}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j),$$

$$s_\varDelta{}^{(9)}=\sum_{i=p_2}^{p_3-1}\sum_{j=q_2}^{q_3-1}m_{ij}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j),\quad S_\varDelta{}^{(9)}=\sum_{i=p_2}^{p_3-1}\sum_{j=q_2}^{q_3-1}M_{ij}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)$$

このとき

$$S_\varDelta=\sum_{i=1}^{9}S_\varDelta{}^{(i)},\quad s_\varDelta=\sum_{i=1}^{9}s_\varDelta{}^{(i)}$$

関数 $f(x)$ が長方形領域 D 上で積分可能であるから，分割 $\varDelta$ を細かくしていけば，$S_\varDelta-s_\varDelta\longrightarrow 0$ となる。

すなわち，任意の正の実数 ε に対して，分割 $\varDelta$ を十分細かくしていけば，$S_\varDelta-s_\varDelta<\varepsilon$ が成り立つ。

このとき

$$S_\varDelta{}^{(5)}-s_\varDelta{}^{(5)}\leqq\sum_{i=1}^{9}\{S_\varDelta{}^{(i)}-s_\varDelta{}^{(i)}\}=S_\varDelta-s_\varDelta<\varepsilon$$

よって，関数 $f(x)$ は D_5 上で積分可能である。

同様に，関数 $f(x)$ は D_1，D_2，D_3，D_4，D_6，D_7，D_8，D_9 上でも積分可能であることが示せる。 ■

C　累次積分の定理の導入

$D=[a,\ b]\times[c,\ d]$ とし，$f(x,\ y)$ を D 上の連続関数とする。

いま，$x_0\in[a,\ b]$ をとると，y だけを変数とする 1 変数関数 $f(x_0,\ y)$ が得られる。この 1 変数関数 $f(x_0,\ y)$ は閉区間 $[c,\ d]$ 上で連続である。

よって，$f(x_0,\ y)$ は閉区間 $[c,\ d]$ 上で積分可能である。これにより，$F_1(x)=\int_c^d f(x,\ y)dy$ を考えることができ，次の補題が成り立つ。

補題　関数 $F_1(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ 上で連続である。

次に，$y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$ を，閉区間 $[a,\ b]$ 上で定義された連続関数とし，任意の $x\in[a,\ b]$ に対して，$\varphi(x)\leqq\psi(x)$ とする。

このとき，$D=\{(x,\ y)\mid a\leqq x\leqq b,\ \varphi(x)\leqq y\leqq\phi(x)\}$ とし，関数 $f(x,\ y)$ を D 上の連続関数とする。同様に，$F_1(x)=\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)}f(x,\ y)dy$ を考えることができ，次の補題が成り立つ。

補題　関数 $F_1(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ 上で連続である。

上の補題は下の補題の特別な場合であるから，下の補題を証明する。

下の補題の 証明　関数 $F_1(x)$ が任意の $x_0\in[a,\ b]$ で連続であることを示す。

ε を任意の正の実数とする。$\varphi(x)$ と $\phi(y)$ の連続性から，正の実数 δ を十分小さくとれば，$|x-x_0|<\delta$ のときの $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|$ や $|\phi(x)-\phi(x_0)|$ の値は限りなく小さくできるので $c=\max\{\varphi(x),\ \varphi(x_0)\}$，
$d=\min\{\phi(x),\ \phi(x_0)\}$ としたとき，次のようにしてよい。

$$\left|F_1(x)-\int_c^d f(x,\ y)dy\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|F_1(x_0)-\int_c^d f(x_0,\ y)dy\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

また，$f(x,\ y)$ は D 上で一様連続なので，δ を十分小さくとり直せば，
$|x-x'|<\delta$ かつ $|y-y'|<\delta$ であるすべての $(x,\ y)\in D$，$(x',\ y')\in D$ について $|f(x,\ y)-f(x',\ y')|<\dfrac{\varepsilon}{3(d-c)}$ となるようにできる。

このとき，$|x-x_0|<\delta$ を満たす任意の $x\in[a,\ b]$ について

$$\begin{aligned}
&|F_1(x)-F_1(x_0)|\\
&=\left|F_1(x)-\int_c^d f(x,\ y)dy+\int_c^d f(x,\ y)dy-\int_c^d f(x_0,\ y)dy+\int_c^d f(x_0,\ y)dy-F_1(x_0)\right|\\
&\leqq\left|F_1(x)-\int_c^d f(x,\ y)dy\right|+\int_c^d|f(x,\ y)-f(x_0,\ y)|dy+\left|F_1(x_0)-\int_c^d f(x_0,\ y)dy\right|\\
&<\frac{\varepsilon}{3}+\int_c^d\frac{\varepsilon}{3(d-c)}dy+\frac{\varepsilon}{3}\\
&=\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon
\end{aligned}$$

したがって，$F_1(x)$ は，閉区間 $[a,\ b]$ 上で連続であり，積分可能である。

■

D　累次積分の定理

長方形領域上での累次積分の定理

長方形領域 $D=[a,\ b]\times[c,\ d]$ 上で連続な 2 変数関数 $f(x,\ y)$ を考える。

[1]　$f(x,\ y)$ の変数 y を定数とみなして得られる（独立変数を x とする）関数 $F_1(x)$ は，閉区間 $[a,\ b]$ 上で連続であり積分可能である。

[2]　上の $F_1(x)$ を $[a,\ b]$ 上で x について積分して得られる関数

$$F_2(y)=\int_a^b F_1(x)dx=\int_a^b f(x,\ y)dx$$

は，残った変数 y についての関数として閉区間 $[c,\ d]$ 上で連続であり積分可能である。

[3]　上の y を独立変数とする関数 $F_2(y)$ を $[c,\ d]$ 上で積分したとき，次が成り立つ。

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy=\int_c^d F_2(y)dy=\int_c^d \left\{\int_a^b f(x,\ y)dx\right\}dy$$

さらに，x と y の役割（順番）を逆にしても同様のことが成り立ち，最後に得られる次の式も成り立つ。

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy=\int_a^b \left\{\int_c^d f(x,\ y)dy\right\}dx$$

2 つの関数のグラフで挟まれた領域上での累次積分の定理

2 つの 1 変数関数 $y=\varphi(x)$ と $y=\phi(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ 上で連続であり，さらに，任意の $x\in[a,\ b]$ について $\varphi(x)\leqq\phi(x)$ であるとすると，$\iint_D f(x,\ y)dx=\int_a^b \left\{\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(x,\ y)dy\right\}dx$ が成り立つ。

まず，2 つの関数のグラフで挟まれた領域上での累次積分の定理を示す。

証明　D を完全に含むような長方形領域 $R=[a,\ b]\times[c,\ d]$ を考え，R 上の有界関数 $\tilde{f}(x,\ y)$ を，定義 6-3（226 ページ）と同様に，次で定める。

$$\tilde{f}(x,\ y)=\begin{cases} f(x,\ y) & ((x,\ y)\in D) \\ 0 & ((x,\ y)\notin D) \end{cases}$$

Rの分割　　$\Delta:\begin{cases} a=a_0<a_1<a_2<\cdots\cdots<a_{n-1}<a_n=b \\ c=c_0<c_1<c_2<\cdots\cdots<c_{m-1}<c_m=d \end{cases}$

をとり，nm 個の小さい長方形領域 $D_{ij}=[a_i,\ a_{i+1}]\times[c_j,\ c_{j+1}]$

$(i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ j=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ m-1)$，および

$$m_{ij}=\min\{\tilde{f}(x,\ y)\mid(x,\ y)\in D_{ij}\},\ M_{ij}=\max\{\tilde{f}(x,\ y)\mid(x,\ y)\in D_{ij}\}$$

を考える。$(x,\ y)\in D_{ij}$ ならば，$m_{ij}\leqq\tilde{f}(x,\ y)\leqq M_{ij}$ であるから，まず両辺を y について c_j から c_{j+1} まで積分して

$$m_{ij}(c_{j+1}-c_j)\leqq\int_{c_j}^{c_{j+1}}\tilde{f}(x,\ y)dy\leqq M_{ij}(c_{j+1}-c_j)$$

次に，Cの 2 つ目の補題から，これを x について a_i から a_{i+1} まで積分して

$$m_{ij}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\leqq\int_{a_i}^{a_{i+1}}\left\{\int_{c_j}^{c_{j+1}}\tilde{f}(x,\ y)dy\right\}dx$$
$$\leqq M_{ij}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)$$

これを $i,\ j$ についてすべて加えると

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}m_{ij}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\leqq\int_a^b\left\{\int_c^d\tilde{f}(x,\ y)dy\right\}dx$$
$$\leqq\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}M_{ij}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)$$

定義 6-3（226 ページ）より $f(x,\ y)$ はD上で積分可能なので，この両端の和は，分割を細かくすることで共通の値 $\iint_D f(x,\ y)dxdy$ に収束する。

$\tilde{f}(x,y)$ の定義より，次が成り立つ。

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy=\int_a^b\left\{\int_c^d\tilde{f}(x,\ y)dy\right\}dx=\int_a^b\left\{\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)}f(x,\ y)dy\right\}dx$$

よって，示すべき等式が得られる。■

次に，長方形領域上での累次積分の定理について，[2] はCの 1 つ目の補題から得られる。また，長方形領域は 2 つのグラフで挟まれた領域の特殊例なので，最初の等式 $\iint_D f(x,\ y)dxdy=\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,\ y)dy\right\}dx$ は，2 つの関数のグラフで挟まれた領域上の累次積分の定理の特別な場合である。x と y の役割を入れ替えても，長方形領域は 2 つのグラフで挟まれた領域であり，[3] が得られる。