39 定　積　分

■基本事項■

1 定積分

関数 $f(x)$ の１つの不定積分を $F(x)$ とするとき，$F(b)-F(a)$ を $f(x)$ の a から b までの **定積分** といい，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す。また，$F(b)-F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_a^b$ で表す。

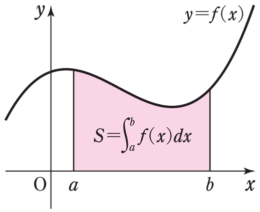
すなわち，$F'(x)=f(x)$ のとき　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

a を **下端**，b を **上端** という。

注意　$F(x)$ の代わりに $F(x)+C$（C は積分定数）を用いても

$\Big[F(x)+C\Big]_a^b=\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)$

となって同じ結果になるから，定積分の計算では **積分定数 C は最初から省略してよい。**

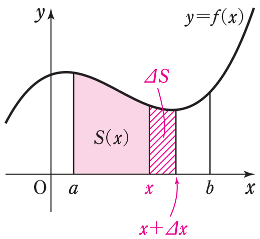


区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq 0$ ならば，この定積分の値はこの区間で曲線 $y=f(x)$ と x 軸で挟まれる部分の面積 S を表す。

証明　x 座標が a から x（$a\leqq x\leqq b$）までの部分で，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で挟まれる部分の面積を $S(x)$ とする。

$\varDelta x>0$ のとき，x から $x+\varDelta x$ までの区間における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とすると

$m\cdot\varDelta x\leqq S(x+\varDelta x)-S(x)\leqq M\cdot\varDelta x$　…… ①

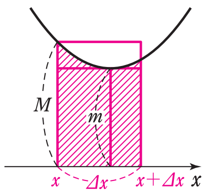


よって　$m\leqq\dfrac{S(x+\varDelta x)-S(x)}{\varDelta x}\leqq M$　…… ②

ここで　$\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{S(x+\varDelta x)-S(x)}{\varDelta x}=S'(x)$　導関数の定義。

また，$y=f(x)$ のグラフから

$\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}m=\lim_{\varDelta x\to 0}M=f(x)$



よって，② において $\varDelta x\longrightarrow 0$ とすると

$f(x)\leqq S'(x)\leqq f(x)$

すなわち　$S'(x)=f(x)$　…… ③

$\varDelta x\leqq 0$ ならば，① の各辺は負で不等号の向きが逆になり，② はそのまま成り立つから，このときも ③ が成り立つ。

そこで，$F'(x)=f(x)$ とすると　$S(x)=F(x)+C$（C は積分定数）

$x=a$ とおくと，$S(x)$ の定義より $S(a)=0$ であるから　$0=F(a)+C$

ゆえに　$C=-F(a)$　　よって　$S(x)=F(x)-F(a)$

したがって　$\displaystyle S=S(b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$

注意　$a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\leqq 0$ のときは，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=-S$ となる。

2 定積分の性質

前ページの定義と不定積分の性質（$p.381$）から，次の性質が得られる。

⓪ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt$　◀定積分は積分変数の文字には無関係。

① **定数倍**　$\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$　ただし，k は定数

② **和**　$\displaystyle\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

一般に，k，l は定数とする。

$$\int_a^b\{kf(x)+lg(x)\}\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx+l\int_a^b g(x)\,dx$$

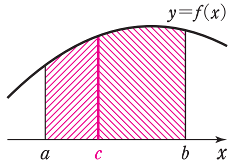
③ $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$

④ $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

⑤ **積分区間の分割**

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

特に $a<c<b$，$f(x)\geqq 0$ のときは，右の図のようになる。

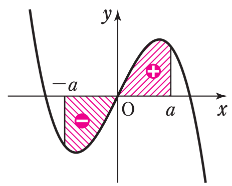


注意　⑤ は a，b，c の大小に関係なく成り立つ。

⑥ **奇関数・偶関数**（$p.225$）**の定積分**

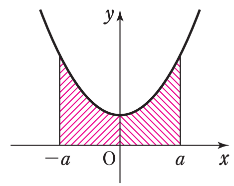
$f(-x)=-f(x)$ [奇関数] のとき

$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$



$f(-x)=f(x)$ [偶関数] のとき

$\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$



特に　$\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n+1}\,dx=0$，　$\displaystyle\int_{-a}^a x^{2n}\,dx=2\int_0^a x^{2n}\,dx$　（n は０または正の整数）

例　$\displaystyle\int_{-1}^1(x^3+x^2+x+1)\,dx=\int_{-1}^1(x^3+x)\,dx+\int_{-1}^1(x^2+1)\,dx$

$\displaystyle=0+2\int_0^1(x^2+1)\,dx$

$\displaystyle=2\Big[\frac{x^3}{3}+x\Big]_0^1=2\Big(\frac{1}{3}+1\Big)-0=\frac{8}{3}$

Check 問題

49　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^5(2x-3)\,dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2(2x^2-3x+4)\,dx$　(3) $\displaystyle\int_{-1}^0(t^2-2t+3)\,dt$

(4) $\displaystyle\int_0^2(x^3-3x^2-1)\,dx$　(5) $\displaystyle\int_{-2}^2(2x^3-x^2-3x+4)\,dx$　⇨ **1**，**2**

例題 249 曲線と x 軸の間の面積

★★☆☆☆

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2-2x$，x 軸，$x=3$　　(2) $y=x^3-2x^2-x+2$，x 軸

指針 面積の計算では，まず，求める部分がどのような図形かを知る必要がある。

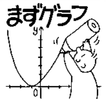


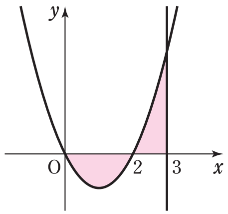
CHART　面積　まず　グラフをかけ

そして，グラフの 上下関係（この場合はグラフが x 軸の上にあるか下にあるか）に注意して，積分区間を分ける。

解答 (1) $x^2-2x=x(x-2)$

曲線と x 軸の交点の x 座標は　$x=0,\ 2$

よって，図から，求める面積 S は



$$S=-\int_0^2(x^2-2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$$

◀ x 軸より下 $\to S=-\int_a^b f(x)dx$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-4\right)+0+(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)$$

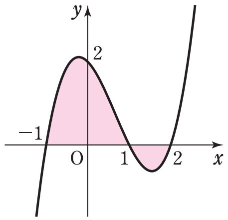
$$=\frac{8}{3}$$

(2) $x^3-2x^2-x+2=x(x^2-1)-2(x^2-1)=(x^2-1)(x-2)$

$=(x+1)(x-1)(x-2)$

曲線と x 軸の交点の x 座標は　$x=-1,\ 1,\ 2$

よって，図から，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^1(x^3-2x^2-x+2)dx-\int_1^2(x^3-2x^2-x+2)dx$$

└偶は 2 倍，奇は 0

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=2\left(-\frac{2}{3}+2\right)-0-\left\{\frac{16-1}{4}-\frac{2}{3}(8-1)-\frac{4-1}{2}+2(2-1)\right\}$$

└同じ分母ごとにまとめる。

$$=\frac{37}{12}$$

検討　面積を求めるための図

グラフをかく といっても，本問では曲線と x 軸の **上下関係** と **共有点**（交点）さえわかればよい。よって，面積を求める目的が達せられる程度の図で十分である。例えば (2) のような 3 次関数のグラフの場合でも，極値を与える点の座標などをいちいち求める必要はない。x^3 の係数の符号に注意して，x 軸との上下関係がわかるようなグラフをかけばよい。

練習 249 次の曲線，直線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=2x^2+3x-2$　　(2) $y=x^2-4x-5$ $(x\leqq 4)$，$x=-2$，$x=4$

(3) $y=x^3-5x^2+6x$

例題 250 2 曲線の間の面積

★★☆☆☆

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

←例題 243，249

(1) $y=x^2-x-4$，$y=x-1$　　(2) $y=x^2-x$，$y=-x^2+3x+4$

指針 前例題と同様，まずは **グラフをかいて**，**上下関係** と **共有点**（交点）を確認する。ここで，放物線と直線，または 2 つの放物線で囲まれた部分の面積では，次の CHART で示した公式が必ず利用できる。これを利用すると計算がらくになる。

CHART　放物線に関する面積

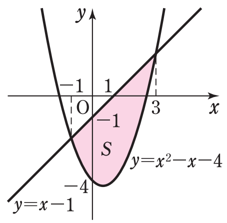
$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \text{ を活用}$$

解答 (1) 放物線と直線の交点の x 座標は，

$x^2-x-4=x-1$　すなわち　$x^2-2x-3=0$

を解くと，$(x+1)(x-3)=0$ から　$x=-1,\ 3$

よって，右の図から，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^3\{(x-1)-(x^2-x-4)\}dx$$

$$=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx=-\int_{-1}^3(x+1)(x-3)dx$$

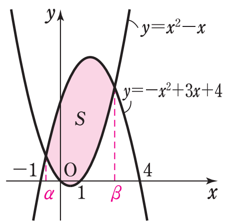
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$$

(2) 2 つの放物線の交点の x 座標は，

$x^2-x=-x^2+3x+4$　すなわち　$x^2-2x-2=0$ ……①

を解いて　$x=1\pm\sqrt{3}$

$\alpha=1-\sqrt{3}$，$\beta=1+\sqrt{3}$ とすると，求める面積 S は



$$S=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+3x+4)-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(-2x^2+4x+4)dx=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-2\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{3}\{(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})\}^3=8\sqrt{3}$$

別解 2 次方程式①の解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-2$

よって　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\cdot(-2)=12$

したがって　$S=\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{12})^3=8\sqrt{3}$

練習 250 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=2x^2-3x+1$，$y=2x-1$　　(2) $y=2x^2-7x+8$，$y=-x^2+5x-1$

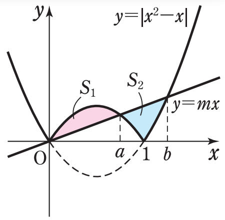
(3) $y=x^2-3x$，$y=-x^2+x+5$

例題 263 面積の最大・最小 (3) ★★★★☆

曲線 $y=|x^2-x|$ と直線 $y=mx$ が異なる 3 つの共有点をもつとき，この曲線と直線で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S が最小になるような m の値を求めよ。

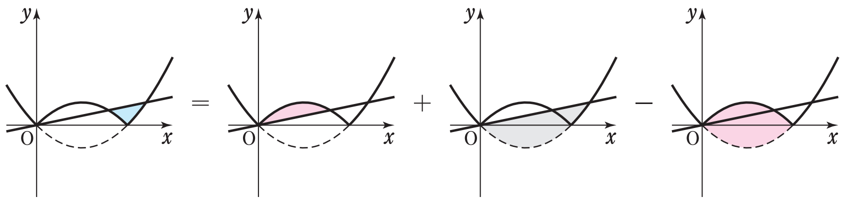
〔類 山形大〕 ←例題 250

指針 曲線 $y=|x^2-x|$ は，曲線 $y=x^2-x$ の $y<0$ の部分を x 軸に関して対称に折り返したもので，図のようになる。
よって，曲線 $y=|x^2-x|$ と直線 $y=mx$ が異なる 3 つの共有点をもつための条件は，直線 $y=mx$ が原点を通ることから
$0<m<$(原点における接線の傾き)　　である。
ここで，曲線と直線の原点以外の共有点の x 座標を a，b とする。
また，図のように面積 S_1，S_2 を定めると，面積 S は
$S=S_1+S_2$　　と表される。

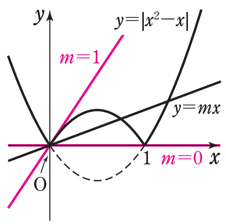


S_1 は，放物線と直線で囲まれた部分の面積であるから，$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ の公式が利用できる。

S_2 は，$\displaystyle\int_a^1\{mx-(-x^2+x)\}dx+\int_1^b\{mx-(x^2-x)\}dx$ を計算しても求められるが，下の図の赤または黒で塗った部分の面積の和・差として考えると，$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ が利用できるので，計算がらくになる。



答案 曲線 $y=|x^2-x|$ は，図のようになる。
$y=-x^2+x$ について　　$y'=-2x+1$
よって，原点における接線の傾きは　1
ゆえに，曲線と直線が異なる 3 つの共有点をもつための条件は
$0<m<1$
異なる 3 つの共有点の x 座標は，方程式 $|x^2-x|=mx$ の解である。
$x^2-x\geqq 0$ すなわち $x\leqq 0$，$1\leqq x$ のとき
$x^2-x=mx$ から　　$x\{x-(1+m)\}=0$
よって　　$x=0$，$1+m$
$x^2-x<0$ すなわち $0<x<1$ のとき
$-x^2+x=mx$ から　　$x\{x-(1-m)\}=0$
$0<x<1$ から　　$x=1-m$
したがって，異なる 3 つの共有点の x 座標は
$x=0$，$1-m$，$1+m$



◀$-2\cdot 0+1=1$

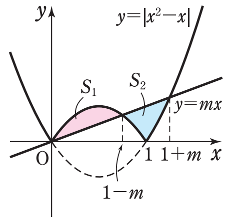
◀m を動かして，図から判断する。

絶対値　場合に分けよ

◀$0<m<1$ であるから　$1\leqq 1+m$
($1\leqq x$ を満たす)

◀$0<m<1$ から
$0<1-m<1$
($0<x<1$ を満たす)

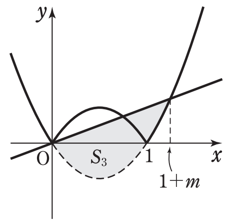
面積 S_1，S_2，S_3，S_4 を図のように定めると
$S=S_1+S_2=S_1+(S_1+S_3-2S_4)$
$=2S_1+S_3-2S_4$

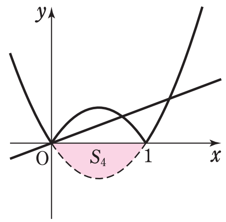


$\displaystyle S_1=\int_0^{1-m}\{(-x^2+x)-mx\}dx$
$\displaystyle =-\int_0^{1-m}x\{x-(1-m)\}dx=\frac{1}{6}(1-m)^3$

$\displaystyle S_3=\int_0^{1+m}\{mx-(x^2-x)\}dx$
$\displaystyle =-\int_0^{1+m}x\{x-(1+m)\}dx$
$\displaystyle =\frac{1}{6}(1+m)^3$

$\displaystyle S_4=-\int_0^1 x(x-1)dx=\frac{1}{6}$





ゆえに　　$\displaystyle S=\frac{1}{3}(1-m)^3+\frac{1}{6}(1+m)^3-\frac{1}{3}$
$\displaystyle =-\frac{1}{6}(m^3-9m^2+3m-1)$

よって　　$\displaystyle \frac{dS}{dm}=-\frac{1}{2}(m^2-6m+1)$

$0<m<1$ の範囲において　$\dfrac{dS}{dm}=0$
とすると　$m=3-2\sqrt{2}$
S の増減表から，S が最小になるような m の値は　　$m=3-2\sqrt{2}$

m	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$\dfrac{dS}{dm}$		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

◀S は m の 3 次関数
⟶ 微分して増減表。

◀$\sqrt{9}-\sqrt{8}>0$ から
$3-2\sqrt{2}>0$
$1-(3-2\sqrt{2})$
$=2\sqrt{2}-2$
$=\sqrt{8}-\sqrt{4}>0$ から
$3-2\sqrt{2}<1$

参考 S_2 を直接計算すると

$\displaystyle S_2=\int_{1-m}^1\{mx-(-x^2+x)\}dx+\int_1^{1+m}\{mx-(x^2-x)\}dx$
$\displaystyle =\int_{1-m}^1\{x^2-(1-m)x\}dx+\int_1^{1+m}\{-x^2+(1+m)x\}dx$
$\displaystyle =\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1-m}{2}x^2\right]_{1-m}^1+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{1+m}{2}x^2\right]_1^{1+m}$
$\displaystyle =\frac{1}{3}-\frac{1-m}{2}-\frac{(1-m)^3}{3}+\frac{(1-m)^3}{2}-\frac{(1+m)^3}{3}+\frac{(1+m)^3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1+m}{2}$
$\displaystyle =\frac{1}{6}(1-m)^3+\frac{1}{6}(1+m)^3-\frac{1}{3}$

よって　　$\displaystyle S=S_1+S_2=\frac{1}{3}(1-m)^3+\frac{1}{6}(1+m)^3-\frac{1}{3}$

◀やや計算が面倒になる。

練習 263 xy 平面上に放物線 $C：y=-3x^2+3$ と 2 点 A(1, 0)，P(0, $3p$) がある。線分 AP と C は，A とは異なる点Qを共有している。
(1) 定数 p の存在する範囲を求めよ。
(2) S_1 を，C と線分 AQ で囲まれた領域とし，S_2 を，C，線分 QP，および y 軸で囲まれた領域とする。S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。
〔一橋大〕