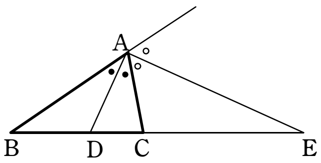
第２章　図形の性質

１１　三角形の辺の比

1　三角形の角の二等分線と比

定理１　$\triangle$ABCの$\angle$Aの二等分線と辺BCとの交点Dは，辺BCをAB：ACに内分する。
すなわち　　BD：DC＝AB：AC

定理２　AB≠ACである$\triangle$ABCの$\angle$Aの外角の二等分線と辺BCの延長との交点Eは，辺BCをAB：ACに外分する。
すなわち　　BE：EC＝AB：AC



BD：DC＝AB：AC
BE：EC＝AB：AC

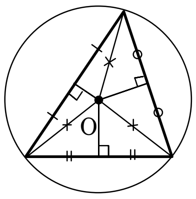
１２　三角形の外心・内心・重心

1　三角形の外心・内心・重心

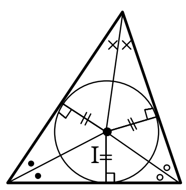
定理３　三角形の３辺の垂直二等分線は１点（**外心**）で交わる。

定理４　三角形の３つの内角の二等分線は１点（**内心**）で交わる。

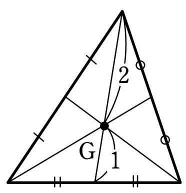
定理５　三角形の３本の中線は１点（**重心**）で交わり，その点は各中線を２：１に内分する。



外心 O



内心 I

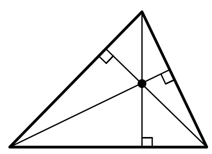


重心 G

補　三角形の垂心

1　三角形の垂心

三角形の３つの頂点から，向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線は１点で交わる。この点を三角形の **垂心** という。

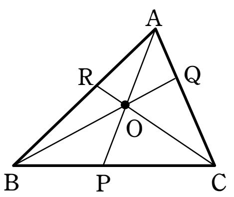


１３　チェバの定理，メネラウスの定理

1　チェバの定理

定理６　$\triangle$ABCの内部に点Oがある。頂点A，B，CとOを結ぶ直線が，向かい合う辺とそれぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

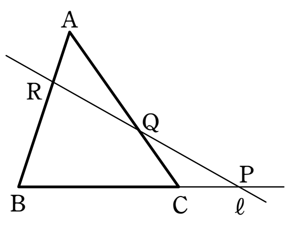


2　メネラウスの定理

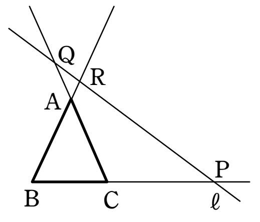
定理７　$\triangle$ABCの辺BC，CA，ABまたはその延長が，三角形の頂点を通らない直線ℓと，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

Pが辺BCの延長上にある場合



さらに，Qが辺CAの延長上，
Rが辺BAの延長上にある場合



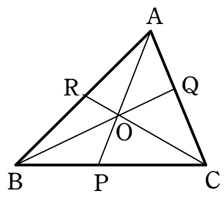
研究　チェバの定理の逆，メネラウスの定理の逆

1　チェバの定理

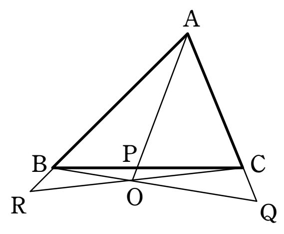
定理６′　$\triangle$ABCの辺上にもその延長上にもない点Oがある。頂点A，B，CとOを結ぶ直線AO，BO，COが，向かい合う辺BC，CA，ABまたはその延長と，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

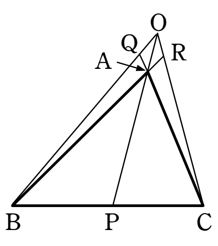
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

Oが$\triangle$ABCの内部にあるとき



Oが$\triangle$ABCの外部にあるとき



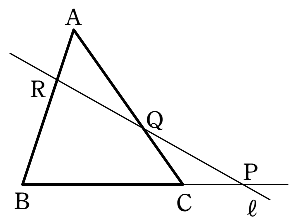


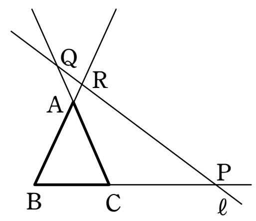
2　チェバの定理の逆（定理6′の逆）

$\triangle$ABCの辺BC，CA，ABまたはその延長上に，それぞれ点P，Q，Rがあり，この３点のうち，１個または３個が辺上にあるとする。このとき，BQとCRが交わり，かつ $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立てば，３直線AP，BQ，CRは１点で交わる。

3　メネラウスの定理の逆

$\triangle$ABCの辺BC，CA，AB またはその延長上に，それぞれ点P，Q，Rがあり，この３点のうち１個または３個が辺の延長上にあるとき，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立てば，３点P，Q，Rは一直線上にある。





研究　三角形の辺と角

1　三角形の３辺の大小関係

１つの三角形において

[1]　２辺の長さの和は，他の１辺の長さよりも大きい。

[2]　２辺の長さの差は，他の１辺の長さよりも小さい。

2　三角形の存在条件

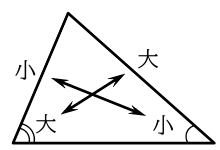
正の数 a，b，c を３辺の長さとする三角形が存在するための条件は，$|b-c|<a<b+c$ が成り立つことである。

参考　３辺の長さ a，b，c の中で，a が最大であれば，三角形が存在するための条件は，$a<b+c$ が成り立つことである。

3　三角形の辺と角の大小関係

$\triangle$ABCにおいて，次が成り立つ。

$b>c \iff \angle B>\angle C$
$b=c \iff \angle B=\angle C$
$b<c \iff \angle B<\angle C$

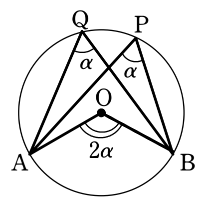


１４　円に内接する四角形

1　円周角の定理

円周角の定理

１つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の大きさの半分である。



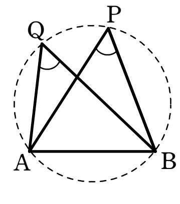
注　異なる３点A，B，Pについて，次が成り立つ。
点Pが線分ABを直径とする円の周上にある
$\iff \angle APB=90°$

円周角の定理の逆

４点A，B，P，Qについて，点P，Qが直線ABに関して同じ側にあって

$$\angle APB=\angle AQB$$

ならば，４点A，B，P，Qは１つの円周上にある。



2　円に内接する四角形

定理８　円に内接する四角形について，次の[1]，[2]が成り立つ。

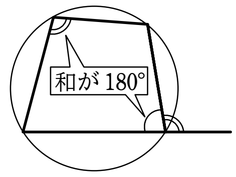
[1]　対角の和は180°である。

[2]　内角は，その対角の外角に等しい。

定理９　次の[1]または[2]が成り立つ四角形は，円に内接する。

[1]　１組の対角の和が180°である。

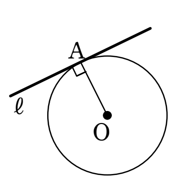
[2]　内角が，その対角の外角に等しい。



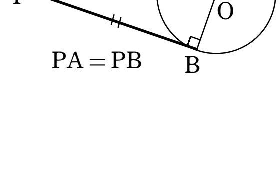
１５　円と直線

1　円の接線

１　円Oの周上の点Aを通る直線ℓについて，次が成り立つ。
直線ℓが点Aで円Oに接する $\iff$ OA$\perp\ell$



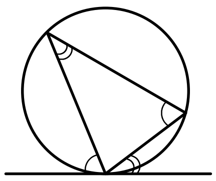
２　円の外部の１点からその円に引いた２つの接線の長さは等しい。



PA＝PB

$\boxed{2}$ **円の接線と弦の作る角**

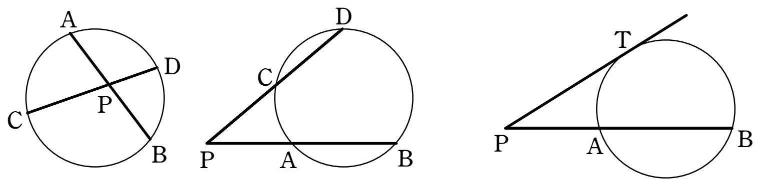
定理１０ 円の接線とその接点を通る弦の作る角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



$\boxed{3}$ **方べきの定理**

定理１１ 円の２つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とすると，PA・PB＝PC・PD が成り立つ。

定理１２ 円の外部の点 P から円に引いた接線の接点を T とする。P を通ってこの円と２点 A，B で交わる直線を引くと，PA・PB＝PT^2 が成り立つ。



PA・PB＝PC・PD　　　　PA・PB＝PT^2

研究　**方べきの定理の逆** (定理 11 の逆)

２つの線分 AB と CD，または AB の延長と CD の延長が点 P で交わるとき，
PA・PB＝PC・PD が成り立つならば，４点 A，B，C，D は１つの円周上にある。

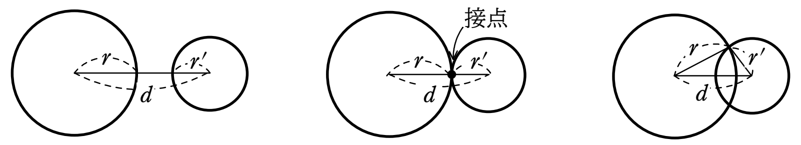
補足　定理 12 についても，その逆である次のことが成り立つ。
一直線上にない３点 A，B，T および線分 AB の延長上の点 P について，
PA・PB＝PT^2 が成り立つならば，直線 PT は３点 A，B，T を通る円に接する。

１６　２つの円

$\boxed{1}$ **２つの円の位置関係**

２つの円の半径を r，r' ($r>r'$)，中心間の距離を d とする。
２つの円の位置関係には，次のような場合がある。

[1]　互いに外部にある　　[2]　外接する　　[3]　２点で交わる



$d>r+r'$　　$d=r+r'$　　$r-r'<d<r+r'$

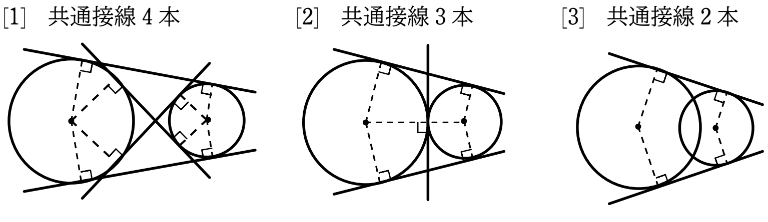
[4]　内接する　　[5]　一方が他方の内部にある

$d=r-r'$　　$d<r-r'$

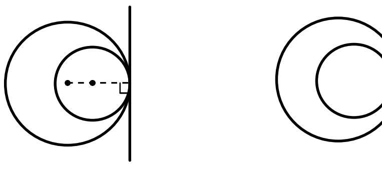
$\boxed{2}$ **２つの円の共通接線**

２つの円の両方に接する直線を，２つの円の **共通接線** という。
２つの円の共通接線には，次のような場合がある。

[1]　共通接線４本　　[2]　共通接線３本　　[3]　共通接線２本



[4]　共通接線１本　　[5]　共通接線はない



１７　作図

$\boxed{1}$ **作図の意味**

作図では，定規とコンパスを用いて
　[1]　与えられた２点を通る直線を引くこと
　[2]　与えられた１点を中心として，与えられた半径の円をかくこと
だけができる。それらの直線や円などの交点を求めて，次々と点，直線，円をかき，条件を満たす図形をかくことが作図である。

注　２枚の三角定規をすべらせて平行線を引いたり，定規の目もりで長さを測ったりすることは，上の意味の作図ではない。

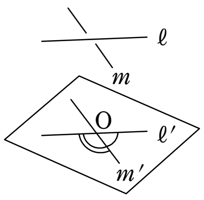
１８　直線と平面

$\boxed{1}$ **２直線の位置関係**

１　異なる２直線 ℓ，m の位置関係には，次の３つの場合がある。
　[1]　１点で交わる
　[2]　平行である ($\ell /\!/ m$)　　}……２直線は１つの平面上にある。
　[3]　ねじれの位置にある　……２直線は１つの平面上にない。

２　３直線 ℓ，m，n について，次のことが成り立つ。
　$\ell /\!/ m$，$m /\!/ n$ ならば $\ell /\!/ n$

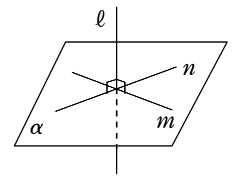
３　２直線 ℓ，m が平行でないとき，１点 O を通り，ℓ，m に平行な直線を，それぞれ ℓ'，m' とすると，ℓ' と m' のなす角を **２直線 ℓ，m のなす角** という。２直線 ℓ，m のなす角が直角のとき，ℓ と m は **垂直** であるといい，$\ell \perp m$ と書く。垂直な２直線 ℓ と m が交わるとき，ℓ と m は **直交** するという。また，**平行な２直線の一方に垂直な直線は，他方にも垂直である。**



$\boxed{2}$ **直線と平面の位置関係**

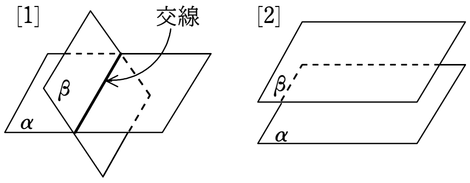
１　直線 ℓ と平面 α の位置関係には，次の３つの場合がある。
　[1]　ℓ は α に含まれる
　[2]　１点で交わる　　}……ℓ と α は共有点をもつ。
　[3]　平行である ($\ell /\!/ \alpha$) ……　ℓ と α は共有点をもたない。

２　直線 ℓ が，平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき，ℓ は α に **垂直** である，または ℓ は α に **直交** するといい，$\ell \perp \alpha$ と書く。このとき，ℓ を平面 α の **垂線** という。
また，**直線 ℓ が，平面 α 上の交わる２直線 m，n に垂直ならば，直線 ℓ は平面 α に垂直である。**

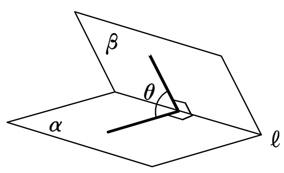


$\boxed{3}$ **２平面の位置関係**

１　異なる２平面 α，β の位置関係には，次の２つの場合がある。
　[1]　交わる
　[2]　平行である ($\alpha /\!/ \beta$)



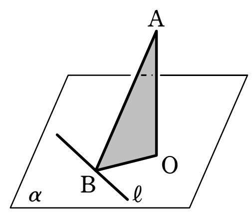
２　交わる２平面の交線上の点から，各平面上に，交線に垂直に引いた２直線のなす角を **２平面のなす角** という。
２平面 α，β のなす角が直角のとき，α，β は **垂直** である，または **直交** するといい，$\alpha \perp \beta$ と書く。
また，**平面 α に垂直な直線を含む平面は，α に垂直である。**



補足　**三垂線の定理**

平面 α とその上の直線 ℓ がある。このとき，α 上にない点 A，α 上にあるが ℓ 上にない点 O，および ℓ 上の点 B について，次の **三垂線の定理** が成り立つ。

１　$\mathrm{OA} \perp \alpha$，$\mathrm{OB} \perp \ell$　ならば　$\mathrm{AB} \perp \ell$
２　$\mathrm{OA} \perp \alpha$，$\mathrm{AB} \perp \ell$　ならば　$\mathrm{OB} \perp \ell$
３　$\mathrm{OB} \perp \ell$，$\mathrm{AB} \perp \ell$，$\mathrm{OA} \perp \mathrm{OB}$　ならば　$\mathrm{OA} \perp \alpha$

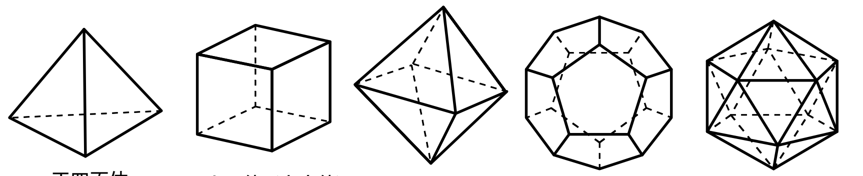


１９　空間図形と多面体

$\boxed{1}$ **多面体**

１　三角柱，四角錐などのように，平面だけで囲まれた立体を **多面体** といい，へこみのない多面体を **凸多面体** という。

２　次の [1]，[2] を満たす凸多面体を **正多面体** という。
　[1]　各面はすべて合同な正多角形である。
　[2]　各頂点に集まる面の数はすべて等しい。
正多面体は，次の５種類しかないことが知られている。



正四面体　　正六面体（立方体）　　正八面体　　正十二面体　　正二十面体

$\boxed{2}$ **オイラーの多面体定理**

凸多面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると $v-e+f=2$ が成り立つ。

$\boxed{3}$ **正多面体から切り取った立体**

正四面体，正八面体は，次のようにして正六面体の内部に作ることができる。

１　正四面体……正六面体の各辺の隣り合わない頂点を結ぶ。

２　正八面体……正六面体の各面の対角線の交点を頂点とし，隣り合う面どうしの頂点を結ぶ。