第２章　空間のベクトル

７　空間の点

1　空間の点の座標

１　x 軸，y 軸，z 軸上の点は，それぞれ $(a,\ 0,\ 0)$，$(0,\ b,\ 0)$，$(0,\ 0,\ c)$ と表される。

２　xy 平面，yz 平面，zx 平面上の点は，それぞれ $(a,\ b,\ 0)$，$(0,\ b,\ c)$，$(a,\ 0,\ c)$ と表される。

2　対称な点の座標

原点，座標軸，座標平面に関して，点 $(a,\ b,\ c)$ と対称な点の座標は次のようになる。

１　原点：$(-a,\ -b,\ -c)$

２　x 軸：$(a,\ -b,\ -c)$，　y 軸：$(-a,\ b,\ -c)$，　z 軸：$(-a,\ -b,\ c)$

３　xy 平面：$(a,\ b,\ -c)$，　yz 平面：$(-a,\ b,\ c)$，　zx 平面：$(a,\ -b,\ c)$

3　原点Ｏと点Ｐの距離

原点Ｏと点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ の距離は　$\mathrm{OA}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

８　空間のベクトル

1　空間のベクトル

空間における有向線分で向きと大きさを表す。

空間ベクトルの和，差，実数倍の定義も，平面上の場合と同様である。平面上のベクトルについて成り立つ性質は，空間のベクトルに対してもそのまま成り立つ。

2　ベクトルの分解

同じ平面上にない４点Ｏ，Ａ，Ｂ，Ｃについて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，この空間のどんなベクトル $\vec{p}$ も，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と適当な実数 s，t，u を用いて，

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形でただ１通りに表すことができる。

参考　空間におけるこのような３つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は **１次独立** であるという。

９　ベクトルの成分

1　ベクトルの成分表示

基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$　x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル

$$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0),\ \vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0),\ \vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$$

原点をＯとする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点Ａの座標が $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$$

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)\quad (\vec{a}\ の成分表示)$$

ベクトルの相等　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\vec{a}=\vec{b}\iff a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

ベクトルの大きさ　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

2　和，差，実数倍の成分表示

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$$

$$k(a_1,\ a_2,\ a_3)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)\quad ただし，k\ は実数$$

3　２点Ａ，Ｂとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

２点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

１０　ベクトルの内積

1　ベクトルの内積

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

注　$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

2　内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ とする。

１　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

以下，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ とする。

２　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}}$$

３　垂直条件

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0\iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

3　内積の性質

平面上のベクトルの場合と同様に，次のことが成り立つ。

１　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　　２　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

３　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　４　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

５　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　　ただし，k は実数

１１　ベクトルの図形への応用

1　位置ベクトル

平面上のベクトルの場合と同様に，次のことが成り立つ。

１　２点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

２　２点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分ＡＢを $m:n$ に内分する点，$m:n$ に外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

$$内分\cdots\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},\qquad 外分\cdots\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

とくに，線分ＡＢの中点の位置ベクトルは　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

３　３点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心Ｇの位置ベクトル $\vec{g}$ は

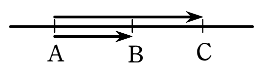
$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

2　一直線上にある点

２点Ａ，Ｂが異なるとき

点Ｃが直線ＡＢ上にある

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k がある



3　同じ平面上にある点　（２は発展）

一直線上にない３点Ａ，Ｂ，Ｃと点Ｐについて

１　点Ｐが平面ＡＢＣ上にある

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ となる実数 s，t がある

２　点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ が３点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ の定める平面ＡＢＣ上にある

$\iff$ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，$s+t+u=1$ となる実数 s，t，u がある

１２　座標空間における図形

1　２点間の距離と内分点・外分点

２点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

１　Ａ，Ｂ間の距離は　$\mathrm{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

２　線分ＡＢを $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n},\ \frac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$$

線分ＡＢを $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \frac{-na_2+mb_2}{m-n},\ \frac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$$

2　座標平面に平行な平面の方程式

点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$ を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は　$x=a$　[x 軸に垂直]

点 $\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$ を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は　$y=b$　[y 軸に垂直]

点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は　$z=c$　[z 軸に垂直]

3　球面の方程式

１　点 $(a,\ b,\ c)$ を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

とくに，原点を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

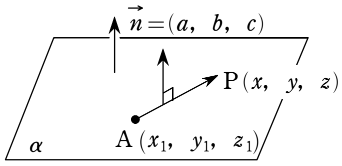
２　一般形　$x^2+y^2+z^2+kx+ly+mz+n=0$　（ただし，$k^2+l^2+m^2-4n>0$）

これは点 $\left(-\dfrac{k}{2},\ -\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{m}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{k^2+l^2+m^2-4n}}{2}$ の球面を表す。

発展　平面の方程式，直線の方程式

1　平面の方程式

空間において，平面 α 上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とする。



1　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面 α を，ベクトル方程式で表すと，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ より

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とすると，平面 α の方程式は

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$ （① をベクトルの成分で表す）

2　**一般形**　　$ax+by+cz+d=0$

これはベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ に垂直な平面を表す。

2　直線の方程式

空間において，直線 g 上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とし，t を実数とする。

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通りベクトル $\vec{d}$ に平行な直線 g のベクトル方程式は

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$$ （$\vec{d}$ は直線 g の方向ベクトル）

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\vec{d}=(l,\ m,\ n)$ とすると

$$(x,\ y,\ z)=(x_1,\ y_1,\ z_1)+t(l,\ m,\ n)$$
$$=(x_1+lt,\ y_1+mt,\ z_1+nt)$$

したがって

$$x=x_1+lt,\ y=y_1+mt,\ z=z_1+nt \quad \cdots\cdots ①$$ （直線 g の媒介変数表示）

参考　① において，$lmn\fallingdotseq 0$ のとき t を消去すると，次の直線の方程式が得られる。

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$