第４章　式と曲線

１８　放物線

1　放物線の方程式

x 軸を軸とする放物線の標準形　$y^2=4px$（$p\neq 0$）

1　焦点は点 $(p,\ 0)$，準線は直線 $x=-p$

2　軸は x 軸，頂点は原点 O

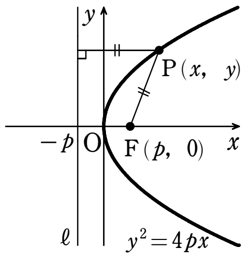
3　曲線は x 軸に関して対称

y 軸を軸とする放物線の標準形　$x^2=4py$（$p\neq 0$）

1　焦点は点 $(0,\ p)$，準線は直線 $y=-p$

2　軸は y 軸，頂点は原点 O

3　曲線は y 軸に関して対称



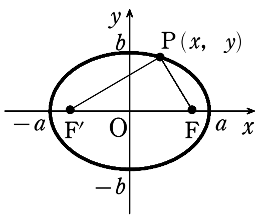
参考　放物線 $y=ax^2$ は，$x^2=4\cdot\dfrac{1}{4a}y$ と表されるから，

その焦点は点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$，準線は直線 $y=-\dfrac{1}{4a}$ である。

１９　楕円

1　楕円の方程式

楕円の標準形　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　($a>0,\ b>0$)



$a>b>0$ のとき

1　焦点は　2 点 $(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

2　楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は　$2a$

3　長軸の長さは $2a$，短軸の長さは $2b$

4　曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称

$b>a>0$ のとき

1　焦点は　2 点 $(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$，$(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$

2　楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は　$2b$

3　長軸の長さは $2b$，短軸の長さは $2a$

4　曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称

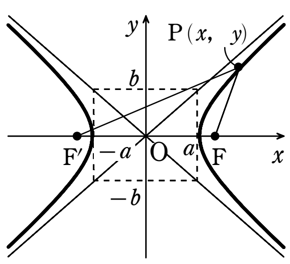
参考　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，円 $x^2+y^2=a^2$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍に縮小または拡大して得られる曲線である。

２０　双曲線

1　双曲線の方程式

双曲線の標準形

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ または $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$　($a>0,\ b>0$)



$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のとき

1　焦点は　2 点 $(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

　頂点は　2 点 $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$

2　双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は　$2a$

3　漸近線は　2 直線 $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$

4　曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ のとき

1　焦点は　2 点 $(0,\ \sqrt{a^2+b^2})$，$(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$

　頂点は　2 点 $(0,\ b)$，$(0,\ -b)$

2　双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は　$2b$

3　漸近線は　2 直線 $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$

4　曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称

参考　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ の漸近線は 2 直線 $y=x$，$y=-x$ であり，これらは直角に交わる。このように，直角に交わる漸近線をもつ双曲線を **直角双曲線** という

２１　２次曲線の平行移動

1　曲線の平行移動

曲線 $F(x,\ y)=0$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後の曲線の方程式は　　$F(x-p,\ y-q)=0$

2　曲線の対称移動

曲線 $F(x,\ y)=0$ を，次の直線または点に関して対称移動するとき，移動後の曲線の方程式は

x 軸：$F(x,\ -y)=0$　　y 軸：$F(-x,\ y)=0$　　原点：$F(-x,\ -y)=0$

直線 $y=x$：$F(y,\ x)=0$

２２　２次曲線と直線

1　2 次曲線と直線の共有点

1　**共有点の座標**　2 次曲線と直線の方程式を連立させた方程式の実数解

2　**位置関係**　2 次曲線と直線の方程式から 1 文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式を D とすると

$D>0 \iff$ 異なる 2 点で交わる　（共有点 2 個）

$D=0 \iff$ 接する　（共有点 1 個）

$D<0 \iff$ 共有点をもたない　（共有点 0 個）

注　双曲線とその漸近線に平行な直線，放物線とその軸に平行な直線の場合，方程式から 1 文字を消去すると 1 次方程式になることがある。そのときは 1 点で交わる。なお，双曲線とその漸近線は共有点をもたない。

研究　２次曲線の接線の方程式

1　2 次曲線の接線の方程式

放物線 $y^2=4px$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　　$y_1y=2p(x+x_1)$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　　$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　　$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

補足　放物線 $x^2=4py$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　$x_1x=2p(y+y_1)$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=-1$

補　２次曲線と領域

1　2 次曲線と領域

不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}<1$ の表す領域は，

曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を境界線とする領域の，原点を含む部分

不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}>1$ の表す領域は，

曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を境界線とする領域の，原点を含まない部分

２３　２次曲線の性質

1　焦点，準線，離心率

定点 F と，F を通らない定直線 ℓ があり，平面上の点 P から ℓ に下ろした垂線を PH とする。PF：PH$=e$：1（一定）であるとき，点 P の軌跡は次のようになる。

$0<e<1$ のとき　楕円　　$e=1$ のとき　放物線　　$e>1$ のとき　双曲線

（F：焦点，　ℓ：焦点 F に対する準線，　e：離心率）

２４　曲線の媒介変数表示

1　一般角 θ を用いた媒介変数表示

1　円 $x^2+y^2=a^2$　　$x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$

2　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　$x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$

3　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　$x=\dfrac{a}{\cos\theta}$，$y=b\tan\theta$

　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$　　$x=a\tan\theta$，$y=\dfrac{b}{\cos\theta}$

4　サイクロイド　　$x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$

2　媒介変数表示される曲線の平行移動

媒介変数表示 $x=f(t)+p$，$y=g(t)+q$ で表される曲線は，媒介変数表示 $x=f(t)$，$y=g(t)$ で表される曲線を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

２５　極座標と極方程式

1　極座標と直交座標

点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，次の関係が成り立つ。

１　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

２　$r=\sqrt{x^2+y^2}$，　$r\neq 0$ のとき　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$

2　極方程式

円　極を中心とする半径 a の円の極方程式は　$r=a$

中心の極座標が $(a,\ 0)$ である半径 a の円の極方程式は　$r=2a\cos\theta$

直線　極座標が $(a,\ 0)$ である点Aを通り，始線に垂直な直線の極方程式は

$$r=\frac{a}{\cos\theta}$$

極を通り，始線と α の角をなす直線の極方程式は　$\theta=\alpha$

参考　１　中心の極座標が $(r_1,\ \theta_1)$ である半径 a の円の極方程式は

$$r^2+{r_1}^2-2rr_1\cos(\theta-\theta_1)=a^2$$

２　極座標が $(a,\ \alpha)$ である点Aを通り，始線OX（Oは極）に垂直な直線の極方程式は　$r\cos(\theta-\alpha)=a$　$(a>0)$

３　極座標が $(a,\ 0)$ である点Aを通り，始線に垂直な直線を ℓ とする。
焦点の1つが極O，準線が直線 ℓ，離心率が e である2次曲線の極方程式は

$$r=\frac{ea}{1+e\cos\theta}$$

$0<e<1$ のときは楕円，$e=1$ のときは放物線，$e>1$ のときは双曲線となる。

注　$r<0$ のとき，$(r,\ \theta)$ は極座標が $(|r|,\ \theta+\pi)$ である点を表すものとする。