第１章　平面上のベクトル

１　ベクトル，ベクトルの演算

$\boxed{1}$ ベクトル

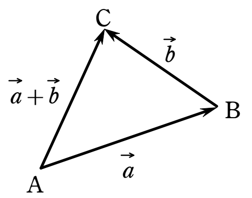
ベクトルの相等　$\vec{a}=\vec{b} \iff \vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じで大きさが等しい

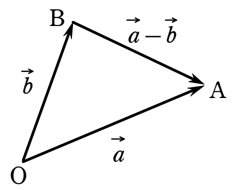
逆ベクトル $-\vec{a}$　$\vec{a}$ と大きさが等しく向きが反対のベクトル　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

零ベクトル $\vec{0}$　大きさが 0 のベクトル，向きは考えない　$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$

$\boxed{2}$ ベクトルの演算

加法　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　**減法**　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$





実数倍 $k\vec{a}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき　$k>0$ ならば　$\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル

$k<0$ ならば　$\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

ベクトルの演算法則

k，l は実数とするとき

交換法則　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

結合法則　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

実数倍の性質　$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$，　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$，　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

注　$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$，　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$，　$0\vec{a}=\vec{0}$，　$k\vec{0}=\vec{0}$

$\boxed{3}$ ベクトルの平行

1　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき　$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k がある

2　大きさが 1 のベクトルを **単位ベクトル** という。

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは　$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\boxed{4}$ ベクトルの分解

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，どんなベクトル $\vec{p}$ も，$\vec{a}$，$\vec{b}$ と適当な実数 s，t を用いて，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の形でただ 1 通りに表すことができる。

参考　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は **1 次独立** であるという。

２　ベクトルの成分

$\boxed{1}$ ベクトルの成分表示

基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$

座標平面上で，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル

$$\vec{e_1}=(1,\ 0),\ \vec{e_2}=(0,\ 1)$$

ベクトルの成分表示

O を原点とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点 A の座標が $(a_1,\ a_2)$ のとき

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)\quad(\vec{a}\text{ の成分表示})$$

ベクトルの相等

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

ベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

$\boxed{2}$ 和，差，実数倍の成分表示

$$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$$

$$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$$

$$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)\quad ただし，k は実数$$

$\boxed{3}$ 2 点 A，B とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2 点 A $(a_1,\ a_2)$，B $(b_1,\ b_2)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2),\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

３　ベクトルの内積

$\boxed{1}$ ベクトルの内積

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

注　$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

$\boxed{2}$ 内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ とする。

1　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

以下，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ とする。

2　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

3　**垂直条件**　$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

4　**平行条件**　$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff$ 「$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$ または $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$」

$\iff a_1b_2-a_2b_1=0$

$\boxed{3}$ 内積の性質

1　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　　2　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

3　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　4　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

5　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　ただし，k は実数

参考　1 より　$\vec{a}\cdot\vec{a}\geqq0$，$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

$\boxed{4}$ 三角形の面積　$\boxed{研究}$

$\triangle$OAB の面積 S は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

一般に，$\triangle$ABC の面積 S は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}=(p_1,\ p_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}=(q_1,\ q_2)$ とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}=\frac{1}{2}|p_1q_2-p_2q_1|$$

４　位置ベクトル

$\boxed{1}$ 位置ベクトル

平面上で，点 O を定めておくと，どんな点 P の位置も，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ によって決まる。

$\vec{p}$　点 O に関する点 P の位置ベクトル

P $(\vec{p})$　点 O に関する位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P

2 点 A $(\vec{a})$，B $(\vec{b})$ に対して　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

$\boxed{2}$ 内分点，外分点，三角形の重心

1　2 点 A $(\vec{a})$，B $(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点，$m:n$ に外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

$$内分 \cdots \frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},\qquad 外分 \cdots \frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

とくに，線分 AB の中点の位置ベクトルは　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

注意　内分点も外分点もその位置ベクトルは，適当な実数 t を用いて $(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表される。

2　3 点 A $(\vec{a})$，B $(\vec{b})$，C $(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle$ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

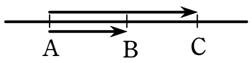
5　ベクトルの図形への応用

1　一直線上にある点

2点A，Bが異なるとき

点Cが直線AB上にある

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k がある



2　ベクトルの分解

$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき

$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \iff s=s',\ t=t'$　（s，t，s'，t' は実数）

とくに　$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0} \iff s=t=0$

3　内積の利用

1　なす角 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\cos\theta$ から。

2　$\mathrm{AB}\perp\mathrm{CD} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$　$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\fallingdotseq 0,\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}\fallingdotseq 0)$

3　$\mathrm{AB}^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

6　図形のベクトルによる表示

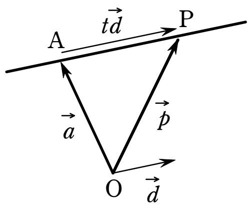
1　直線のベクトル方程式

直線 g 上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とし，s，t は実数とする。

1　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通りベクトル $\vec{d}$ に平行な直線 g のベクトル方程式は　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$　（$\vec{d}$ は直線 g の **方向ベクトル**）

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通りベクトル $\vec{d}=(l,\ m)$ に平行な直線 g 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases}$$（t は **媒介変数**）……①



① を直線 g の **媒介変数表示** という。

また，直線 g の方程式は

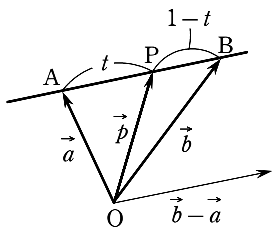
$m(x-x_1)-l(y-y_1)=0$　（① から t を消去する）

2　異なる2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線 g のベクトル方程式は　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

または　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

異なる2点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を通る直線 g 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}$$



また，直線 g の方程式は

$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$

2　平面上の点の存在範囲

$\triangle\mathrm{OAB}$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると，点Pの存在範囲は次のようになる。

1　$s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ のとき　線分AB

2　$s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ のとき　$\triangle\mathrm{OAB}$ の周および内部

3　ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線 g

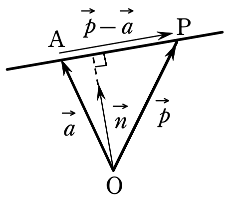
直線 g 上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とする。

1　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通りベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線 g のベクトル方程式は

$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$　（$\vec{n}$ は直線 g の **法線ベクトル**）

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通りベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ に垂直な直線 g 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，直線 g の方程式は

$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$



2　ベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ は，直線 $ax+by+c=0$ に垂直である。

4　円のベクトル方程式

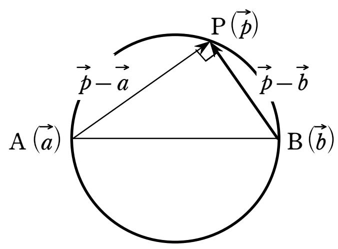
円 C 上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とする。

1　点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ を中心とする半径 r の円 C のベクトル方程式は

$|\vec{p}-\vec{c}|=r$　または　$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$

2　2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分ABを直径の両端とする円 C のベクトル方程式は

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$



補　直線のベクトル方程式の応用

1　直線上にあるための条件

点Pが直線AB上にある $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s+t=1$ となる実数 s，t がある