第３章　複素数平面

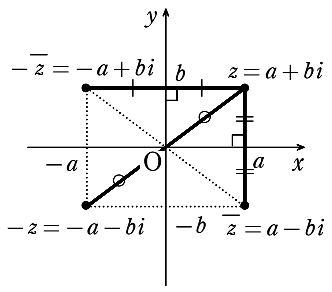
１３　複素数平面

1　複素数平面

以下，複素数 $a+bi$ と書いた場合，文字 a，b は実数を表すものとする。

複素数 $a+bi$ に対して座標平面上の点 $(a,\ b)$ を対応させ，複素数を点で表す座標平面を **複素数平面** または **複素平面** という。複素数平面を考える場合，x 軸を **実軸**，y 軸を **虚軸** という。

複素数 z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表し，これを z の **共役複素数** ともいう。



点 z と点 $\overline{z}$ は　　実軸に関して対称

点 z と点 $-z$ は　　原点に関して対称

点 z と点 $-\overline{z}$ は　虚軸に関して対称

また，複素数 z について，次のことが成り立つ。

1　z が実数　$\iff$　$\overline{z}=z$

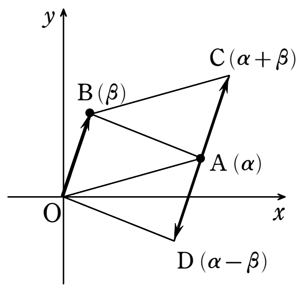
2　z が純虚数 $\iff$　$\overline{z}=-z$　ただし，$z\fallingdotseq 0$

2　複素数の絶対値

複素数 $z=a+bi$ に対して　$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|z|=|\overline{z}|=|-z|$

3　複素数の和，差

1　複素数の和，差は点の平行移動や平行四辺形の頂点として表される。右の図において，四角形 OACB，ODAB は平行四辺形である。



2　2 点 A(α)，B(β) 間の距離 AB は

$$\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|$$

4　複素数の実数倍

複素数 α，β について，$\alpha\fallingdotseq 0$ のとき

3 点 0，α，β が一直線上にある

$\iff$　$\beta=k\alpha$ となる実数 k がある

5　共役複素数の性質　α，β，z は複素数とする。

1　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　　　2　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

3　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$　　　4　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

5　$z+\overline{z}$ は実数である　　　6　$z\overline{z}=|z|^2$

１４　複素数の極形式

1　極形式

1　0 でない複素数 $z=a+bi$ は次の形に表される。

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

ただし，$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ である。

z の偏角の 1 つを θ_0 とすると　$\arg z=\theta_0+2n\pi$　(n は整数)

注　以下，複素数を極形式で表すとき，その複素数は 0 でないとする。

2　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ (ただし，$r>0$) のとき

$\overline{z}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$

$-z=r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}$

2　極形式で表された複素数の積と商

$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ (ただし，$r_1>0$，$r_2>0$) とする。

1　積　$\alpha\beta=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$，$\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta$

2　商　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$，$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta$

注　偏角についての等式 (たとえば $\arg\alpha=\arg\beta$ など) は，両辺の角が 2π の整数倍の違いは無視して考える。

3　原点を中心とする回転

$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ と複素数 z に対して，点 αz は，点 z を原点を中心として θ だけ回転した点である。

とくに，次のことがいえる。

点 iz は，点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

点 $-iz$ は，点 z を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

１５　ド・モアブルの定理

1　ド・モアブルの定理

n が整数のとき　$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ (ただし，$r>0$) に対して

$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

また　$\dfrac{1}{z^n}=\dfrac{1}{r^n}\{\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\}=\dfrac{1}{r^n}(\cos n\theta-i\sin n\theta)$

2　複素数の n 乗根

1　1 の n 乗根は，次の式から得られる n 個の複素数である。

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

2　$n\geqq 3$ のとき，複素数平面上で，1 の n 乗根を表す点は，単位円に内接する正 n 角形の各頂点である。とくに，頂点の 1 つは点 1 である。

注　一般に，0 でない複素数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ (ただし，$r>0$) の n 乗根 z_k は

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

１６　複素数と図形 (1)　　１７　複素数と図形 (2)

1　線分の内分点，外分点

1　2 点 A(α)，B(β) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を C(γ)，$m:n$ に外分する点を D(δ) とすると

内分点　$\gamma=\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$　　外分点　$\delta=\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$

とくに，線分 AB の中点を表す複素数は　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

2　3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC の重心を G(δ) とすると

$$\delta=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

2　方程式の表す図形

点 α を中心とする半径 r の円の方程式は　$|z-\alpha|=r$

2 点 α，β を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式は　$|z-\alpha|=|z-\beta|$

3　点 α を中心とする回転

点 β を，点 α を中心として θ だけ回転した点を表す複素数を γ とすると

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

4　半直線のなす角

異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) に対して，点 A を中心として半直線 AB を半直線 AC の位置まで回転させたときの角を，半直線 AB から半直線 AC までの **回転角** という。

異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) に対して

1　半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ は　$\theta=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$

注　θ は弧度法で表された一般角である。$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は回転の向きと大きさをもつ一般角であり，負の角を表すこともある。

2　3 点 A，B，C が一直線上にある $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数

3　2 直線 AB，AC が垂直に交わる $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数

5　3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC　研究

3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC があるとき，原点 O と点 D$\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$，E$(1)$ を頂点とする △OED を考えると　△OED∽△ABC