

第1章 数 列

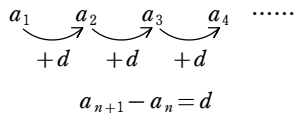
1 数列と一般項、等差数列

① 数列と一般項

数を一列に並べたものを **数列** という。数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  を  $\{a_n\}$  と表す。数列における各数を **項** といい、最初の項を **初項**、 $n$  番目の項を **第  $n$  項** という。数列  $\{a_n\}$  の第  $n$  項が  $n$  の式で表されるとき、これを数列  $\{a_n\}$  の **一般項** という。

② 等差数列

初項に一定の数  $d$  を次々と足して得られる数列を **等差数列** といい、その一定の数  $d$  を **公差** という。



③ 等差数列の一般項

初項  $a$ 、公差  $d$  の等差数列  $\{a_n\}$  の一般項は  $a_n = a + (n - 1)d$

④ 等差数列をなす3数

数列  $a, b, c$  が等差数列  $\iff 2b = a + c$  ( $b$  を **等差中項** という)

2 等差数列の和

① 等差数列の和

等差数列の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。

- 1 初項  $a$ 、第  $n$  項  $l$  のとき  $S_n = \frac{1}{2}n(a + l)$
- 2 初項  $a$ 、公差  $d$  のとき  $S_n = \frac{1}{2}n[2a + (n - 1)d]$

☞ 1 は初項  $a$ 、末項  $l$ 、項数  $n$  の等差数列の和  $S_n$  を表している。

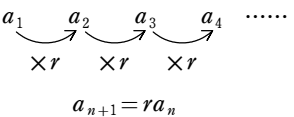
② 自然数の和、奇数の和

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1), \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

3 等比数列

① 等比数列

初項に一定の数  $r$  を次々と掛けて得られる数列を **等比数列** といい、その一定の数  $r$  を **公比** という。



② 等比数列の一般項

初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列  $\{a_n\}$  の一般項は  $a_n = ar^{n-1}$

③ 等比数列をなす3数

$a, b, c$  が0でないとする。  
数列  $a, b, c$  が等比数列  $\iff b^2 = ac$  ( $b$  を **等比中項** という)

4 等比数列の和

① 等比数列の和

初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  は

$r \neq 1$  のとき  $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$  または  $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$   
 $r = 1$  のとき  $S_n = na$

☞  $r \neq 1$  のとき  $\frac{1 - r^n}{1 - r} = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}$

☞ 初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列の第  $n$  項を  $l$  とすると、初項から第  $n$  項までの和は

$\frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a - r \cdot ar^{n-1}}{1 - r} = \frac{a - rl}{1 - r}$

5 和の記号  $\Sigma$

① いろいろな数列の和の公式

$\sum_{k=1}^n c = nc$  とくに  $\sum_{k=1}^n 1 = n$   
 $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n + 1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1), \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n + 1)\right\}^2$   
 $\sum_{k=1}^n r^{k-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$

② 和の記号  $\Sigma$  の性質

- 1  $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$
- 2  $\sum_{k=1}^n p a_k = p \sum_{k=1}^n a_k$  ただし、 $p$  は  $k$  に無関係な定数

6 階差数列

① 階差数列と一般項

数列  $\{a_n\}$  の隣り合う2項の差  $a_{n+1} - a_n = b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  を項とする数列  $\{b_n\}$  を、数列  $\{a_n\}$  の **階差数列** という。

$n \geq 2$  のとき、数列  $\{a_n\}$  の第  $n$  項は  $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \dots \text{①}$

☞ 上の①は  $n \geq 2$  のときの式であるから、 $n = 1$  のときについて、別に確かめる必要がある。

② 数列の和と一般項

数列  $\{a_n\}$  の初項  $a_1$  から第  $n$  項  $a_n$  までの和を  $S_n$  とすると  
初項  $a_1$  は  $a_1 = S_1 \quad n \geq 2$  のとき  $a_n = S_n - S_{n-1}$

7 いろいろな数列の和

① 分数の数列の和

分数の数列の和では、次の変形がよく利用される。

$\frac{1}{(k + a)(k + b)} = \frac{1}{b - a} \left( \frac{1}{k + a} - \frac{1}{k + b} \right) \quad (a \neq b)$

② (等差数列)×(等比数列)の数列の和

等比数列の公比が  $r$  であるとすると、求める和を  $S$  とおき、 $S - rS$  を計算する。

③ 群数列

数列を、ある規則によっていくつかの組 (群) に分けて考えるとき、これを **群数列** という。群数列では、もとの数列の規則、群の分け方の規則に着目する。

8 漸化式

① 漸化式

数列  $\{a_n\}$  において、たとえば  $a_{n+1}=2a_n+3$  のように、前の項から次の項を決めるための関係式を 漸化式 という。

② 漸化式と一般項

初項を  $a$  とする。

- 1  $a_{n+1}=a_n+d$        $\longrightarrow$  公差  $d$  の等差数列  $a_n=a+(n-1)d$
- 2  $a_{n+1}=ra_n$        $\longrightarrow$  公比  $r$  の等比数列  $a_n=ar^{n-1}$
- 3  $a_{n+1}=a_n+f(n)$        $\longrightarrow$  階差数列の第  $n$  項が  $f(n)$   
$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$
- 4  $a_{n+1}=pa_n+q$  ( $p \neq 0, p \neq 1$ )       $\longrightarrow$   $a_{n+1}-c=p(a_n-c)$  の形に変形できる。  
( $c$  は  $c=pc+q$  を満たす数)

発展 隣接 3 項間の漸化式  $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$

$x$  の 2 次方程式  $x^2+px+q=0$  の 2 つの解を  $\alpha, \beta$  とする。

[1]  $\alpha \neq \beta$  のとき

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n), \quad a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$
と変形でき、数列  $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$  は公比  $\beta$  の等比数列、数列  $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$  は公比  $\alpha$  の等比数列である。  
特に、 $\alpha, \beta$  の一方が 1 (このとき、 $p+q=-1$ ) の場合、階差数列  $\{a_{n+1}-a_n\}$  が等比数列になる。

[2]  $\alpha=\beta$  (重解) のとき

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$$
と変形でき、数列  $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$  は公比  $\alpha$  の等比数列である。

9 数学的帰納法

① 数学的帰納法

一般に、自然数  $n$  を含む条件 (A) があるとき、「すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ」を証明するには、次の [1], [2] を示せばよい。

- [1]  $n=1$  のとき、(A) が成り立つ。
- [2]  $n=k$  のとき (A) が成り立つと仮定すると、 $n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

**注意** ある特定の自然数  $l$  以上のすべての自然数  $n$  について、(A) が成り立つことを証明するには、[1] で  $n=l$ , [2] で  $k \geq l$  とすればよい。  
数学的帰納法の証明には、他にも次のようなものがある。

- ①  $n \leq k$  のときを仮定して、 $n=k+1$  のときを証明。
- ②  $n=k, k+1$  のときを仮定して、 $n=k+2$  のときを証明。ただし、この場合は [1] で例えば  $n=1, 2$  を証明する必要がある。

研究 自然数に関する命題のいろいろな証明

- 1 自然数を正の整数  $m$  で割ったときの余りに着目すると、すべての自然数は  
$$mk, mk+1, mk+2, \dots, mk+(m-1)$$
のいずれかの形で表される。
- 2 連続する  $m$  個の自然数には、必ず  $m$  の倍数が含まれるから、それらの積は  $m$  の倍数である。  
**参考**  $k \leq m$  ( $k$  は自然数) とすると、連続する  $m$  個の自然数には、必ず  $k$  の倍数が含まれるから、それらの積は  $k$  の倍数である。  
したがって、連続する  $m$  個の自然数の積は  $m!$  の倍数である。