クリアー数学B ―統計的な推測 ― 要項

第２章　統計的な推測

１０　確率変数と確率分布

1　確率変数と確率分布

確率変数　試行の結果によってその値が定まり，各値に対応して確率が定まるような変数を確率変数という。

確率分布　確率変数 X のとりうる値とその値のとる確率との対応関係を，X の確率分布という。確率変数 X のとりうる値が x_1，x_2，……，x_n であり，それぞれの値をとる確率が p_1，p_2，……，p_n であるとき，次が成り立つ。

$$p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,\ \cdots\cdots,\ p_n \geqq 0 \qquad p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$$

１１　確率変数の期待値と分散

1　確率変数の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとする。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

期待値　$m=E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

$$=\sum_{k=1}^{n} x_kp_k$$

分散　$V(X)=E((X-m)^2)$

$$=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k$$

$$V(X)=E(X^2)-m^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

2　$aX+b$ の期待値，分散，標準偏差

X を確率変数，a，b を定数とするとき

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=\sqrt{V(ax+b)}=|a|\sigma(X)$$

１２　確率変数の和と積

1　同時分布

2つの確率変数 X，Y について，

$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$ とするとき，$(x_i,\ y_j)$ と p_{ij} の対応を X と Y の **同時分布** という。

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	計
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	p_2
$\vdots$		………			$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}		p_{nm}	p_n
計	q_1	q_2	$\cdots$	q_n	1

2　確率変数の独立

2つの確率変数 X，Y について，X のとる値 a と Y のとる値 b に対して

$$P(X=a,\ Y=b)=P(X=a)P(Y=b)$$

が a，b のとり方に関係なく常に成り立つとき，X，Y は互いに **独立** であるという。

3　確率変数の和と積

2つの確率変数 X，Y について

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y) \quad (a,\ b \text{ は定数})$$

とくに，2つの確率変数 X，Y が互いに独立であるとき

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

$$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y) \qquad (a,\ b \text{ は定数})$$

注　3つ以上の確率変数でも同様のことが成り立つ。

補　事象の独立と従属

1　2つの事象 A，B において

$P_A(B)=P(B)$ が成り立つとき，事象 B は事象 A に **独立** であるという。

$P(A)\fallingdotseq 0$，$P(B)\fallingdotseq 0$ のとき，

$$P_A(B)=P(B) \iff P(A\cap B)=P(A)P(B) \iff P_B(A)=P(A)$$

であるから，事象 B が事象 A に独立ならば，事象 A は事象 B に独立になる。

したがって　2つの事象 A，B が互いに独立 $\iff P(A\cap B)=P(A)P(B)$

参考　A と B が独立 $\iff$ $\overline{A}$ と B が独立 $\iff$ A と $\overline{B}$ が独立

$\iff$ $\overline{A}$ と $\overline{B}$ が独立

2　2つの事象 A，B が独立でないとき，A と B は **従属** であるという。

3　3つの事象 A，B，C が互いに独立 $\iff P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

注意　3つの事象 A，B，C が互いに独立であるとは，どの2つの事象も互いに独立であり，また，どの2つの事象の積事象も残りの1つの事象と独立であることをいう。

１３　二項分布

1　二項分布

二項分布 $B(n,\ p)$ とは，次の式で与えられる確率分布である。

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \qquad \text{ただし，} q=1-p$$

2　二項分布に従う確率変数の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき

期待値は　$E(X)=np$

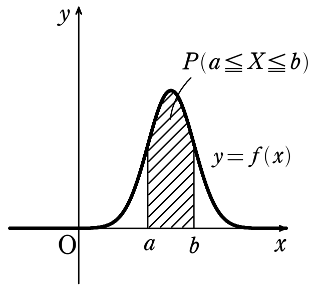
分散は　$V(X)=npq$　　ただし，$q=1-p$

標準偏差は　$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

１４　正規分布

1　連続した値をとる確率変数と確率密度関数

X を連続した値をとる確率変数，$f(x)$ を X の確率密度関数とすると，$f(x)$ は次のような性質をもつ。



1　常に　$f(x)\geqq 0$

2　確率 $P(a\leqq X\leqq b)$ は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積に等しい。

すなわち　$P(a\leqq X\leqq b)=\int_a^b f(x)dx$

3　X のとる値の範囲が $\alpha\leqq X\leqq\beta$ のとき　$\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$

期待値　$m=E(X)=\int_\alpha^\beta xf(x)dx$

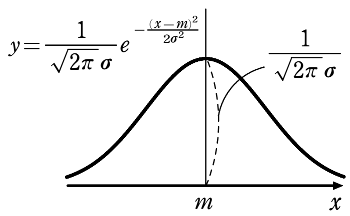
分散　$V(X)=\int_\alpha^\beta (x-m)^2f(x)dx$

2　正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$

1　確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき

期待値は　$E(X)=m$

標準偏差は　$\sigma(X)=\sigma$



2　正規分布曲線 $y=f(x)$ は次の性質をもつ。

[1]　直線 $x=m$ に関して対称であり，y は $x=m$ で最大となる。

[2]　x 軸を漸近線とし，x 軸と分布曲線の間の面積は1である。

[3]　標準偏差 σ が大きくなると，曲線の山は低くなって横に広がる。

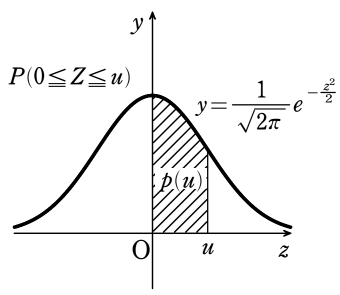
σ が小さくなると，曲線の山は高くなって対称軸 $x=m$ の周りに集まる。

3　標準正規分布 $N(0,\ 1)$

1　確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

2　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとする。

$u\geqq 0$，$v\geqq 0$ とし，$P(0\leqq Z\leqq u)=p(u)$ とすると，たとえば，次のことが成り立つ。



$$P(u\leqq Z\leqq v)=p(v)-p(u)$$

$$P(Z\geqq 0)=0.5,\ P(Z\leqq 0)=0.5$$

$$P(Z\geqq u)=0.5-p(u)$$

$$P(-v\leqq Z\leqq -u)=p(v)-p(u)$$

$$P(-u\leqq Z\leqq v)=p(u)+p(v)$$

4　二項分布の正規分布による近似

1　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が大きいとき，近似的に正規分布 $N(np,\ npq)$ に従う。ただし，$q=1-p$ である。

2　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X に対し，$Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ は，n が大きいとき，近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。ただし，$q=1-p$ である。

１５　母集団と標本

1　全数調査と標本調査

全数調査　調査の対象全体からデータを集めて調べる方法

標本調査　調査の対象全体からその一部を抜き出して調べる方法

2　母集団分布

母集団における変量 x の分布を母集団分布，その平均値を母平均，標準偏差を母標準偏差という。大きさ1の無作為標本における変量 x の値を X とすると，X は確率変数であり，この X の確率分布，期待値，標準偏差は，それぞれ，母集団分布，母平均，母標準偏差と一致する。

１６　標本平均の分布

[1] 標本平均の期待値と標準偏差

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出し，それらの変量 x の値を X_1，X_2，……，X_n とするとき

標本平均　$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}$

期待値　$E(\overline{X})=m$

標準偏差　$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

[2] 標本平均の分布と正規分布

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本の標本平均を $\overline{X}$ とする。

1　$\overline{X}$ は，n が大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなすことができる。

2　$\overline{X}$ に対して，$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は n が大きいとき，近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

[3] 標本比率の分布と正規分布

特性 A の母比率 p の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本について，

標本比率 R は，n が大きいとき，$q=1-p$ とすると，近似的に正規分布 $N\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$ に従うとみなすことができる。

[4] 大数の法則

母平均 m の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，n が大きくなるに従って，その標本平均 $\overline{X}$ はほとんど確実に母平均 m に近づく。

１７　推定

[1] 母平均の推定

母標準偏差を σ とする。標本の大きさ n が大きいとき，標本平均を $\overline{X}$ とすると，母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間は　$\left[\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

[注]　上の σ は母標準偏差であるが，これが不明の場合は，代わりに標本の標準偏差 S を用いても差し支えない。

[2] 母比率の推定

標本の大きさ n が大きいとき，標本比率を R とすると，母比率 p に対する信頼度 95 % の信頼区間は　$\left[R-1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}},\ R+1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}\right]$

１８　仮説検定

[1] 仮説検定

1　**仮説**

母集団に関して考えた仮定。

2　**仮説検定**

標本から得られた結果によって，仮説が正しいかどうか判断する方法。
仮説が正しくないと判断することを，仮説を **棄却する** という。

3　**有意水準**

仮説検定において，仮説を棄却する基準となる確率。
それより確率が小さい事象が起こると仮説を棄却する。

4　**棄却域**

有意水準 α に対して，仮説が棄却されるような確率変数の値の範囲。
実現した確率変数の値が棄却域に入れば仮説を棄却する。

5　**両側検定**

棄却域を分布の両側にとる検定。

片側検定

棄却域を分布の片側にとる検定。

[2] 仮説検定の手順

① ある事象が起こった状況や原因を推測し，仮説を立てる。
② 有意水準 α を定め，仮説にもとづいて棄却域を求める。
③ 標本から得られた確率変数の値が棄却域に入れば仮説を棄却し，
棄却域に入らなければ仮説を棄却しない。