第４章　三角関数

２１　角の拡張

1　一般角

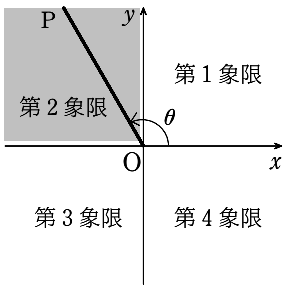
1　動径の表す角（度数法）

動径 OP と始線 OX のなす角の１つを α とすると，動径 OP の表す角は

$$\alpha+360°\times n \quad (n \text{ は整数})$$

2　象限と一般角

点 O を原点とする座標平面上では，x 軸の正の部分を始線 OX にとって，一般角 θ を考える。たとえば，右の図のような θ について，θ の動径は第２象限にあるという。なお，動径 OP が座標軸上にあるときは，どの象限にあるともいわない。



2　弧度法

1　１ラジアン $=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$，$1°=\dfrac{\pi}{180}$ ラジアン，π ラジアン $=180°$

注　弧度法では，単位のラジアンを省略するのがふつうである。

2　動径の表す角（弧度法）

動径 OP と始線 OX のなす角の１つを α とすると，動径 OP の表す角は

$$\alpha+2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

3　扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ（ラジアン）の扇形の弧の長さ l，面積 S は

$$l=r\theta, \qquad S=\frac{1}{2}r^2\theta \quad \text{または} \quad S=\frac{1}{2}lr$$

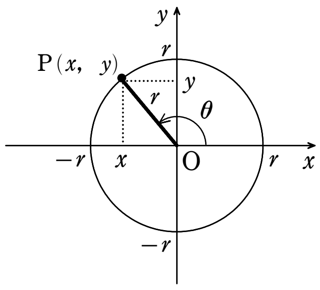
注　角の単位はラジアンを用いる。

２２　三角関数

1　三角関数

一般角 θ の動径と，原点を中心とする半径 r の円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$



2　三角関数の値の範囲

$-1\leqq\sin\theta\leqq1$，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$，

$\tan\theta$ の値の範囲は実数全体

3　三角関数の相互関係

1　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

3　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

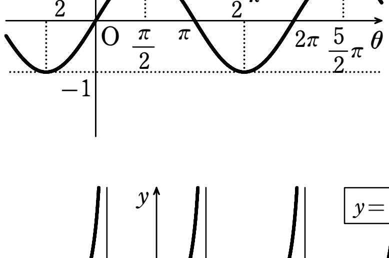
２３　三角関数のグラフ，三角関数の性質

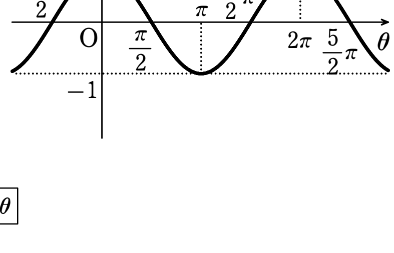
1　三角関数のグラフ

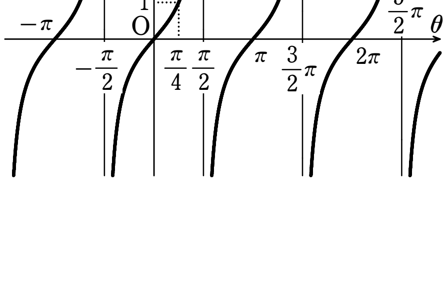
$y=\sin\theta$　周期は 2π，原点に関して対称

$y=\cos\theta$　周期は 2π，y 軸に関して対称

$y=\tan\theta$　周期は π，原点に関して対称，直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$（$n$ は整数）を漸近線にもつ







2　いろいろな三角関数のグラフ

k を正の定数とする。

$y=k\sin\theta$　　$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ k 倍したもの。

$y=\sin(\theta-\alpha)$　$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に α だけ平行移動したもの。

$y=\sin k\theta$　　$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\dfrac{1}{k}$ 倍したもの。

$y=\sin k\theta$，$y=\cos k\theta$ の周期は $\dfrac{2\pi}{k}$，$y=\tan k\theta$ の周期は $\dfrac{\pi}{k}$ である。

3　三角関数で成り立つ等式

1　n を整数とすると

$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$，$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$，$\tan(\theta+n\pi)=\tan\theta$

2　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，　$\cos(-\theta)=\cos\theta$，　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

参考　**グラフの対称性**

一般に，関数 $y=f(x)$ について

[1]　常に $f(-x)=-f(x)$ である $\Longleftrightarrow$ グラフは原点に関して対称

[2]　常に $f(-x)=f(x)$ である $\Longleftrightarrow$ グラフは y 軸に関して対称

[1] の関数 $f(x)$ は **奇関数**，[2] の関数 $f(x)$ は **偶関数** であるという。

3　$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$，$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$，$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

4　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$，$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$，$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

5　$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$，　$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$，　$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

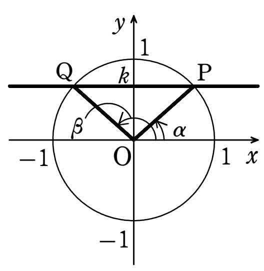
6　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$，　$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

２４　三角関数の応用

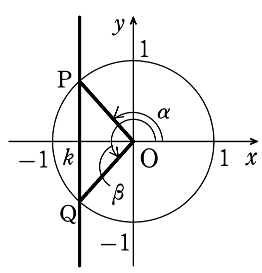
1　三角関数を含む方程式，不等式

三角関数を含む方程式，不等式は，単位円やグラフを利用して解く。

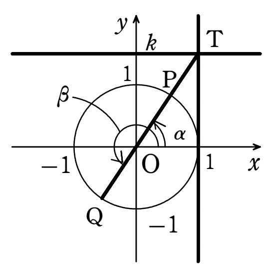
$\sin\theta=k$

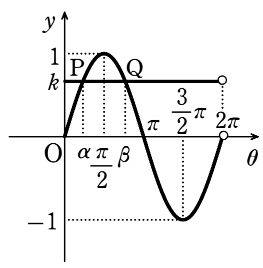


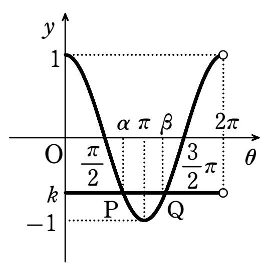
$\cos\theta=k$

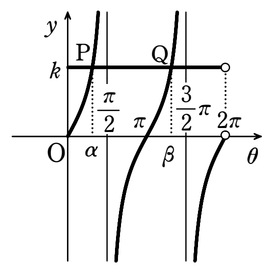


$\tan\theta=k$









2　三角関数を含む関数の最大値，最小値

1　三角関数を t でおき換え，t の関数とみて，最大値，最小値を求める。

2　$\sin\theta=t$，$\cos\theta=t$ などとおき換えたときは，θ の範囲に注意して，t のとりうる値の範囲を考える。

２５　加法定理

1　正弦・余弦の加法定理

1　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

2　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

3　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

4　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

2　正接の加法定理

5　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

6　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

3　２直線のなす角

直線 $y=mx$ と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると　$\tan\theta=m$

参考　一般に，交わる 2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ が垂直でないとき，そのなす鋭角を θ とすると　$\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

4　加法定理と点の回転　研究

点 P$(a,\ b)$ を，原点 O を中心として θ だけ回転した位置にある点 Q$(x,\ y)$ について，OP$=r$，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると

$$x=r\cos(\alpha+\theta)=r\cos\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta=a\cos\theta-b\sin\theta$$
$$y=r\sin(\alpha+\theta)=r\sin\alpha\cos\theta+r\cos\alpha\sin\theta=b\cos\theta+a\sin\theta$$

２６　加法定理の応用

1　２倍角の公式

1　$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2　$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

3　$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

参考　３倍角の公式

1　$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$　　2　$\cos3\alpha=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$

2　半角の公式

1　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$　　2　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

3　$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

3　三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし　$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

発展　和と積の公式

加法定理から，次の公式が導かれる。

(積 → 和)

1　$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

2　$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

3　$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

4　$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

(和 → 積)

5　$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

6　$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

7　$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

8　$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$