第２章　複素数と方程式

８　複素数とその計算

1　複素数

$a+bi$ （a，b は実数，$i^2=-1$）の形に表される数を **複素数** という。

複素数 $a+bi$ では，a を **実部**，b を **虚部**，i を **虚数単位** という。

複素数の相等　a，b，c，d は実数とすると

$a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$

とくに　$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

注　以下，$a+bi$ や $c+di$ などでは，文字 a，b，c，d は実数を表す。

2　複素数の計算

１　**共役な複素数**

２つの複素数 $a+bi$，$a-bi$ を，互いに **共役な複素数** という。

実数 a と共役な複素数は，a 自身である。

２　**加法**　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

減法　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

乗法　$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

除法　$\dfrac{c+di}{a+bi}=\dfrac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2}+\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}i$

3　負の数の平方根

$a>0$ とする。

１　$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　　とくに　$\sqrt{-1}=i$

２　$-a$ の平方根は　$\pm\sqrt{-a}$　すなわち　$\pm\sqrt{a}\,i$

９　２次方程式の解

1　２次方程式の解の公式

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

とくに，$b=2b'$ のとき，２次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

2　２次方程式の解の種類の判別

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，$D=b^2-4ac$ を **判別式** といい，解と判別式について次のことが成り立つ。

$D>0 \iff$ 異なる２つの実数解をもつ
$D=0 \iff$ 重解をもつ
（以上２つをまとめて　$D\geqq 0 \iff$ 実数解をもつ）
$D<0 \iff$ 異なる２つの虚数解をもつ

重解をもつとき，その重解は　$x=-\dfrac{b}{2a}$

２次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ では，D の代わりに $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい。

注　判別式により解を判別できるのは，係数が実数のときに限る。

１０　解と係数の関係

1　解と係数の関係

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の２つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

2　２次式の因数分解

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の２つの解を α，β とすると

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

3　２数を解とする２次方程式

２数 α，β を解とする２次方程式の１つは　$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

4　２次方程式の解と k の大小

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の異なる２つの解を α，β とし，判別式を D とする。

① 解がともに k より大

$\iff D>0,\ (\alpha-k)+(\beta-k)>0,\ (\alpha-k)(\beta-k)>0$

② 解がともに k より小

$\iff D>0,\ (\alpha-k)+(\beta-k)<0,\ (\alpha-k)(\beta-k)>0$

③ ２つの解の間に $k \iff (\alpha-k)(\beta-k)<0$

１１　剰余の定理と因数定理

1　剰余の定理

１　多項式 $P(x)$ を１次式 $x-k$ で割った余りは　$P(k)$

２　多項式 $P(x)$ を１次式 $ax+b$ で割った余りは　$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

2　因数定理

多項式 $P(x)$ が１次式 $x-k$ を因数にもつ $\iff P(k)=0$

参考　多項式 $P(x)$ の各項の係数がすべて整数であるとする。

このとき，最高次の項の係数を a，定数項を c とすると，$P(k)=0$ となる k の候補は

$\pm\dfrac{c\text{ の正の約数}}{a\text{ の正の約数}}$ である。

１２　高次方程式

1　高次方程式の解き方

因数分解により，１次方程式，２次方程式に帰着させる。

高次式を因数分解するには，公式・おき換え・因数定理を利用する。

2　１の３乗根

１の３乗根のうち虚数であるものの１つを ω とする。

１の３乗根は　1，ω，ω^2　　また　$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

3　高次方程式の性質

① n 次方程式は複素数の範囲で，ちょうど n 個の解をもつ。

② 実数係数の高次方程式が虚数解 $a+bi$ を解にもつならば，それと共役な複素数 $a-bi$ も解である。

4　３次方程式の解と係数の関係　発展

３次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の３つの解を α，β，γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$