第６章　微分法と積分法

３２　微分係数

$\boxed{1}$ **極限値**

一般に，関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の **極限値** という。このことを，次のように書く。

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \text{または} \quad x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow \alpha$$

$\boxed{2}$ **平均変化率と微分係数**

関数 $y=f(x)$ において

$x=a$ から $x=b$ までの平均変化率　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$x=a$ における微分係数（変化率）　$f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\boxed{3}$ **接線の傾きと微分係数**

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい。

３３　導関数とその計算

$\boxed{1}$ **導関数**

1　**関数 $f(x)$ の導関数**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(x)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}$$

2　**関数 x^n の導関数**　$(x^n)'=nx^{n-1}$　（n は正の整数）

定数関数 c の導関数　$(c)'=0$

参考　**関数 $(x+a)^n$ の導関数**

a は定数とする。

$y=(x+a)^n$ のとき　$y'=n(x+a)^{n-1}$　（n は正の整数）

$\boxed{2}$ **関数の定数倍および和，差の導関数**

$y=kf(x)$ を微分すると　$y'=kf'(x)$　（k は定数）

$y=f(x)+g(x)$ を微分すると　$y'=f'(x)+g'(x)$

$y=f(x)-g(x)$ を微分すると　$y'=f'(x)-g'(x)$

３４　接線の方程式

$\boxed{1}$ **接線の方程式**

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

３５　関数の増減と極大・極小

$\boxed{1}$ **関数の増減と導関数の符号**

実数 a，b に対して，不等式 $a<x<b$，$a\leqq x\leqq b$，$a\leqq x$，$x<b$ など満たす実数 x 全体の集合を **区間** という。

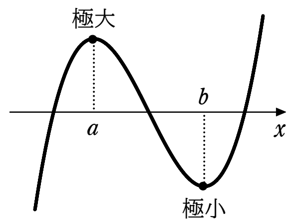
関数 $f(x)$ の増減は，次のようになる。

ある区間で　常に $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で **増加** する。

常に $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で **減少** する。

常に $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ はその区間で **定数** である。

$\boxed{2}$ **関数の極大・極小**



1　関数 $f(x)$ が $x=a$ を境目として増加から減少に移るとき

$f(x)$ は $x=a$ で極大で，極大値は $f(a)$

関数 $f(x)$ が $x=b$ を境目として減少から増加に移るとき

$f(x)$ は $x=b$ で極小で，極小値は $f(b)$

2　関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとる $\Longrightarrow$ $f'(a)=0$

注　$f'(a)=0$ であっても，$f(x)$ は $x=a$ で極値をとるとは限らない。

$\boxed{3}$ **3 次関数の極値**

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\fallingdotseq 0)$ とする。

1　$f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ すなわち $3ax^2+2bx+c=0$ が異なる 2 つの実数解をもつこと。

すなわち，判別式 D について　$\dfrac{D}{4}=b^2-3ac>0$

2　極値をもつときは極大値，極小値を 1 つずつもち　(極大値)$>$(極小値)

3 次の項の係数 a について，

$a>0$ ならば　(極大値をとる x の値)$<$(極小値をとる x の値)

$a<0$ ならば　(極大値をとる x の値)$>$(極小値をとる x の値)

３６　関数の最大・最小

$\boxed{1}$ **関数の最大・最小**

$a\leqq x\leqq b$ における $f(x)$ の最大・最小は，$f(x)$ の極値と定義域の端における関数の値 $f(a)$，$f(b)$ との大小を調べて決定する。その際，増減表を利用する。

注　1　極大値，極小値は必ずしも最大値，最小値ではない。

2　定義域が $a<x<b$ や $x\geqq a$ などの場合には，最大値，最小値がないこともある。

$\boxed{2}$ **文章題（最大・最小）の解法の手順**

[1]　変数を適当に選び，求める量の関数を作る。

[2]　定義域に注意して，その関数の最大値・最小値を調べる。

３７　方程式・不等式への応用

$\boxed{1}$ **方程式への応用**

1　**方程式 $f(x)=0$ の実数解**　　関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標

2　**方程式 $f(x)=g(x)$ の実数解**　2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点の x 座標

$\boxed{2}$ **不等式への応用**

不等式 $f(x)>g(x)$ を証明するには，関数 $F(x)=f(x)-g(x)$ の値の変化を調べる。

1　関数 $F(x)$ の最小値を求めて，(最小値)>0 を示す。

2　関数 $F(x)$ が $x>a$ で $F'(x)>0$ かつ $F(a)\geqq 0$ ならば，$x>a$ で　$F(x)>0$

３８　不定積分

1　導関数と不定積分

1　関数 $f(x)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき　$\int f(x)dx=F(x)+C$　（C は積分定数）

2　関数 x^n の不定積分

n は 0 以上の整数とする。

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$　（C は積分定数）

参考　$\int (ax+b)^n dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$　（C は積分定数）

2　関数の定数倍および和，差の不定積分

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ のとき，C を積分定数とすると

定数倍　$\int kf(x)dx=kF(x)+C$　（k は定数）

和　$\int \{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)+C$

差　$\int \{f(x)-g(x)\}dx=F(x)-G(x)+C$

３９　定積分

1　定積分とその計算

$F'(x)=f(x)$ のとき　$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

定数倍　$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　（k は定数）

和　$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

差　$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

定積分の性質

1　$\int_a^a f(x)dx=0$　　2　$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

3　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

2　偶関数・奇関数の定積分

n は 0 以上の整数とする。

1　$\int_{-a}^a x^{2n}dx=2\int_0^a x^{2n}dx$　　2　$\int_{-a}^a x^{2n+1}dx=0$

3　$(x-\alpha)(x-\beta)$ の定積分

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

4　定積分と微分法

a を定数とするとき，x の関数 $\int_a^x f(t)dt$ の導関数は $f(x)$ である。

すなわち　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

４０　定積分と面積

1　定積分と面積

1　区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　$S=\int_a^b f(x)dx$

2　区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\leqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$

3　区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq g(x)$ のとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフおよび 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

参考　次の公式を利用すると，積分の計算がらくになることがある。

①　放物線に関する面積では

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

②　放物線と接線に関する面積では

$$\int (x+p)^2dx=\frac{1}{3}(x+p)^3+C$$　（C は積分定数）