第１章　式と証明

１　３次式の展開と因数分解

$\boxed{1}$ **3 次式の展開の公式**

1　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

2　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$,　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$\boxed{2}$ **3 次式の因数分解の公式**

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

参考　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$,　$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

２　二項定理

$\boxed{1}$ **パスカルの三角形**

1　数の配列は左右対称で，各行の両端の数は１である。

2　２行目以降の両端以外の数は，左上と右上の数の和に等しい。

$n=1$	1　1	$a+b$
$n=2$	1　2　1	$(a+b)^2$
$n=3$	1　3　3　1	$(a+b)^3$
$n=4$	1　4　6　4　1	$(a+b)^4$
$n=5$	1　5　10　10　5　1	$(a+b)^5$

$\boxed{2}$ **二項定理**

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2$$
$$+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

$\boxed{3}$ **$(a+b+c)^n$ の展開式**　研究

$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ の項の係数は

$$\frac{n!}{p!q!r!}\qquad ただし\quad p+q+r=n$$

３　多項式の割り算

$\boxed{1}$ **多項式の割り算**

1　多項式 A を多項式 B で割った商を Q，余りを R とすると

$A=BQ+R$　(ただし，R は 0 か，B より次数の低い多項式)

2　多項式 A を多項式 B で割った商と余りを求める計算では，A，B を降べきの順に整理してから行う。

４　分数式とその計算

$\boxed{1}$ **分数式**

2 つの多項式 A，B によって $\frac{A}{B}$ の形に表され，B に文字を含む式を，**分数式** という。

$\boxed{2}$ **分数式の計算**

1　$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}$,　$\frac{A\cancel{D}}{B\cancel{D}}=\frac{A}{B}$　(ただし，$C\fallingdotseq 0$，$D\fallingdotseq 0$)

2　$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$,　$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$

3　$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$,　$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$

$\boxed{3}$ **部分分数に分解**

$a\fallingdotseq b$ のとき　$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$

５　恒等式

$\boxed{1}$ **恒等式の性質**

恒等式の両辺が x についての多項式のとき，各辺で同類項を整理すると，次のことが成り立つ。

両辺の同じ次数の項の係数は，それぞれ等しい。

たとえば，a，b，c，a'，b'，c' を定数とするとき，次のことが成り立つ。

1　$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式である

$\iff a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

2　$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である

$\iff a=b=c=0$

$\boxed{2}$ **恒等式の係数決定**

①　**係数比較法**　両辺の同じ次数の項の係数を比較して，連立方程式を作り，それを解く。

②　**数値代入法**　適当な値を代入して，連立方程式を作り，それを解く。(逆の確認が必要)

６　等式の証明

注　以下，分数式では，分母$\fallingdotseq 0$ とする。

$\boxed{1}$ **恒等式の証明**

恒等式 $A=B$ の証明方法

1　A か B の一方を変形して，他方を導く。

2　A と B の両方を変形して，同じ式を導く。

3　$A-B$ を変形して，0 になることを示す。($A-B=0$ を示す。)

$\boxed{2}$ **条件つきの等式の証明**

①　条件式を用いて文字を消去し，$\boxed{1}$で示した恒等式の証明方法で行う。

②　条件式が $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ($\iff a:b=c:d$，$a:c=b:d$) のような比の値を用いた式 (比例式) のときは，(比の値)$=k$ とおく。

７　不等式の証明

注　以下では，とくに断らない限り，文字は実数を表すものとする。

$\boxed{1}$ **実数の大小関係**

0　2 つの実数 a，b については，$a>b$，$a=b$，$a<b$ のうち，どれか 1 つの関係だけが成り立つ。

1　$a>b$，$b>c \Longrightarrow a>c$

2　$a>b \Longrightarrow a+c>b+c$，$a-c>b-c$

3　$a>b$，$c>0 \Longrightarrow ac>bc$，$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

4　$a>b$，$c<0 \Longrightarrow ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

5　$a>b \iff a-b>0$　　6　$a<b \iff a-b<0$

$\boxed{2}$ **不等式の証明**

不等式を証明するには，上記の大小関係，および次の性質を利用する。

実数の平方　$a^2\geqq 0$　(等号は $a=0$ のとき成り立つ)

$a^2+b^2\geqq 0$　(等号は $a=b=0$ のとき成り立つ)

平方の大小　$a>0$，$b>0$ のとき　$a^2>b^2 \iff a>b$,　$a^2\geqq b^2 \iff a\geqq b$

絶対値　$|a|\geqq 0$，$|a|\geqq a$，$|a|\geqq -a$，$|a|^2=a^2$，$|ab|=|a||b|$

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき　$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　(等号は $a=b$ のとき成り立つ)