第３章　図形と方程式

１３　直線上の点，平面上の点

1　数直線上の２点間の距離

数直線上の２点 A(a)，B(b) 間の距離 AB は　　$\mathrm{AB}=|b-a|$

2　線分の内分点・外分点

数直線上の２点 A(a)，B(b) を結ぶ線分 AB を，$m:n$ に内分する点を P，外分する点を Q とする。

内分点 P の座標は　$\dfrac{na+mb}{m+n}$，　外分点 Q の座標は　$\dfrac{-na+mb}{m-n}$

とくに，線分 AB の中点の座標は　$\dfrac{a+b}{2}$

3　座標平面上の２点間の距離

２点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB は　　$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

とくに，原点 O と点 A$(x_1,\ y_1)$ の距離 OA は　　$\mathrm{OA}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}$

4　内分点・外分点の座標，三角形の重心の座標

1　２点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を，$m:n$ に内分する点 P，$m:n$ に外分する点 Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)\qquad \mathrm{Q}\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

とくに，線分 AB の中点の座標は　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

2　３点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

１４　直線の方程式

1　直線の方程式のいろいろな形

1　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は　　$y-y_1=m(x-x_1)$

2　異なる２点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき　　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$x_1=x_2$ のとき　　$x=x_1$

3　x 切片が a，y 切片が b である直線の方程式は

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\quad（ただし，a\neq 0，b\neq 0）$$

１５　２直線の関係

1　２直線の平行・垂直

２直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ について

２直線が平行 $\Longleftrightarrow m_1=m_2$　　　２直線が垂直 $\Longleftrightarrow m_1m_2=-1$

注　$m_1=m_2$ かつ $n_1=n_2$ のとき，２直線は一致するが，この場合も２直線は平行であると考えることにする。

参考　1　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に

平行な直線の方程式は　　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

垂直な直線の方程式は　　$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

2　２直線 $ax+by+c=0$，$a'x+b'y+c'=0$ について

２直線が平行 $\Longleftrightarrow ab'-ba'=0$

２直線が垂直 $\Longleftrightarrow aa'+bb'=0$

2　点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は　　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

参考　**三角形の面積**

３点 $(0,\ 0)$，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を頂点とする三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

3　２直線の交点を通る直線　研究

２直線 $ax+by+c=0$ …… ①，$a'x+b'y+c'=0$ …… ② が１点で交わるとき，方程式 $k(ax+by+c)+a'x+b'y+c'=0$（k は定数）は２直線 ①，② の交点を通る直線を表す。

１６　円の方程式

1　円の方程式

点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は　　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は　　$x^2+y^2=r^2$

2　$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

円の方程式の一般形　$x^2+y^2+lx+my+n=0$　（ただし，$l^2+m^2-4n>0$）

注　$l^2+m^2-4n=0$ ならば１点を表し，$l^2+m^2-4n<0$ ならば表す図形はない。

１７　円と直線

1　円と直線の位置関係

円の方程式と直線の方程式から y を消去して得られる x の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について，その判別式を $D=b^2-4ac$ とする。また，円の半径を r，円の中心と直線の距離を d とする。このとき，円と直線について，次のことが成り立つ。

[1]　異なる２点で交わる $\Longleftrightarrow D>0 \Longleftrightarrow d<r$

[2]　１点で接する $\Longleftrightarrow D=0 \Longleftrightarrow d=r$

[3]　共有点をもたない $\Longleftrightarrow D<0 \Longleftrightarrow d>r$

2　円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　　$x_1x+y_1y=r^2$

参考　円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

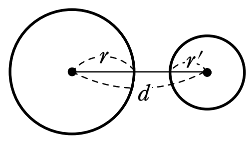
１８　２つの円

1　２つの円の位置関係

２つの円の半径を r，r' $(r>r')$ とし，中心間の距離を d とする。

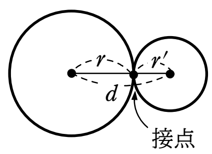
２つの円の位置関係には，次のような場合がある。

[1]　互いに外部にある



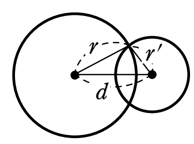
$d>r+r'$

[2]　外接する



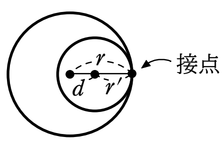
$d=r+r'$

[3]　２点で交わる



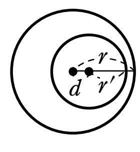
$r-r'<d<r+r'$

[4]　内接する



$d=r-r'$

[5]　一方が他方の内部にある

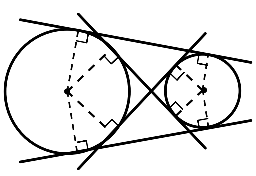


$d<r-r'$

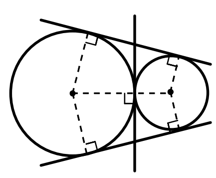
２つの円の両方に接する直線を，２つの円の **共通接線** という。

２つの円の共通接線には，次のような場合がある。

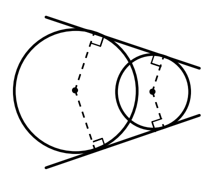
[1]　共通接線４本



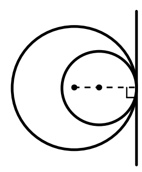
[2]　共通接線３本



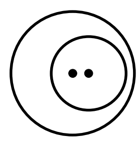
[3]　共通接線２本



[4]　共通接線１本



[5]　共通接線はない



2　２つの円の交点を通る図形

２つの円 $x^2+y^2+lx+my+n=0$，$x^2+y^2+l'x+m'y+n'=0$ が２点で交わるとき，

方程式 $k(x^2+y^2+lx+my+n)+(x^2+y^2+l'x+m'y+n')=0$（$k$ は定数）は

$k\neq -1$ のとき　２つの円の交点を通る円

$k=-1$ のとき　２つの円の交点を通る直線　を表す。

１９　軌跡と方程式

1　座標平面上の点の軌跡

座標を用いて点の軌跡を求める手順

1　条件を満たす点Ｐの座標を $(x,\ y)$ として，Ｐに関する条件を x，y の式で表し，この方程式の表す図形が何かを調べる。

2　逆に，１で求めた図形上のすべての点Ｐが，与えられた条件を満たすことを確かめる。

２０　不等式の表す領域

1　直線を境界線とする領域

直線 $y=mx+n$ を ℓ とする。

1　不等式 $y>mx+n$ の表す領域は，直線 ℓ の上側の部分

2　不等式 $y<mx+n$ の表す領域は，直線 ℓ の下側の部分

注　$y\geqq mx+n$ や $y\leqq mx+n$ の表す領域は，直線 ℓ を含む。

2　曲線を境界線とする領域

曲線 $y=f(x)$ を F とする。

1　不等式 $y>f(x)$ の表す領域は，曲線 F の上側の部分

2　不等式 $y<f(x)$ の表す領域は，曲線 F の下側の部分

注　$y\geqq f(x)$ や $y\leqq f(x)$ の表す領域は，曲線 F を含む。

3　円を境界線とする領域

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を C とする。

1　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は，円 C の内部

2　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は，円 C の外部

注　$(x-a)^2+(y-b)^2\leqq r^2$ や $(x-a)^2+(y-b)^2\geqq r^2$ の表す領域は，円 C を含む。

4　領域を利用した命題の証明

2つの条件 p，q が x，y の不等式で表されるとき，p，q が表す領域を，それぞれ P，Q とする。
命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることを示すには，$P\subset Q$ を示せばよい。