第５章　指数関数と対数関数

２７　指数の拡張

1　整数の指数

$a \neq 0$ で，n は正の整数とするとき

$$a^0=1, \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \qquad \text{とくに} \quad a^{-1}=\frac{1}{a}$$

指数法則（指数が整数）

$a \neq 0$，$b \neq 0$ で，m，n は整数とするとき

1　$a^m a^n = a^{m+n}$　　2　$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

3　$(a^m)^n=a^{mn}$　　4　$(ab)^n=a^n b^n$

2　累乗根

n を正の整数とするとき，n 乗すると a になる数を a の **n 乗根** という。

また，a の 2 乗根，3 乗根，4 乗根，…… をまとめて a の **累乗根** という。

正の数 a に対して，$x^n=a$ を満たす正の数 x がただ 1 つある。

この正の数 x は $\sqrt[n]{a}$ で表す。

また，$\sqrt[n]{0}=0$ である。

累乗根の性質

$a>0$，$b>0$ で，m，n，p は正の整数とするとき

0　$\sqrt[n]{a}>0$，$(\sqrt[n]{a})^n=a$，$\sqrt[n]{a^n}=a$

1　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　2　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　3　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

4　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　　5　$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

参考　**負の数の n 乗根**　　研究

n が正の奇数のときは，負の数 a に対して，$x^n=a$ を満たす実数 x がただ 1 つある。

この数 x も $\sqrt[n]{a}$ で表す。

n が正の偶数のときは，常に $x^n \geqq 0$ であるから，負の数 a に対して $x^n=a$ を満たす実数 x は存在しない。

例　$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$，$\sqrt[5]{-3}=-\sqrt[5]{3}$

3　有理数の指数

$a>0$ で，m，n は正の整数，r は正の有理数とするとき

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad \text{とくに} \quad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a} \qquad a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

指数法則（指数が有理数）

$a>0$，$b>0$ で，r，s は有理数とするとき

1　$a^r a^s=a^{r+s}$　　2　$\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$　　3　$(a^r)^s=a^{rs}$　　4　$(ab)^r=a^r b^r$

注　この指数法則は，指数 r，s が実数の場合にも成り立つ。

２８　指数関数

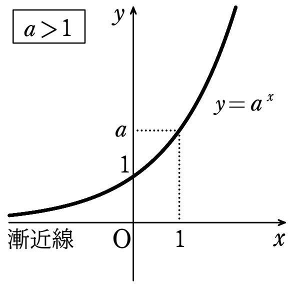
1　指数関数 $y=a^x$（$a>0$，$a \neq 1$）のグラフとその特徴

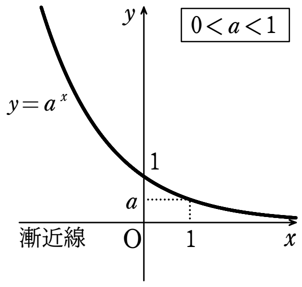
1　定義域は実数全体，値域は正の数全体

2　$a>1$ のとき増加関数　　$p<q \iff a^p<a^q$

　$0<a<1$ のとき減少関数　　$p<q \iff a^p>a^q$

3　$y=a^x$ のグラフは x 軸を漸近線としてもち，2 点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。





２９　対数とその性質

1　指数と対数

$a>0$，$a \neq 1$ で $M>0$ とするとき

$$M=a^p \iff \log_a M=p$$

とくに　$\log_a a^p=p$

また　$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$

2　対数の性質

$a>0$，$a \neq 1$，$M>0$，$N>0$ のとき

1　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

2　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　　とくに　$\log_a \dfrac{1}{N}=-\log_a N$

3　$\log_a M^k=k\log_a M$　（k は実数）

3　底の変換公式

a，b，c は正の数で，$a \neq 1$，$b \neq 1$，$c \neq 1$ とするとき

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \text{とくに} \quad \log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

３０　対数関数

1　対数関数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a \neq 1$）のグラフとその特徴

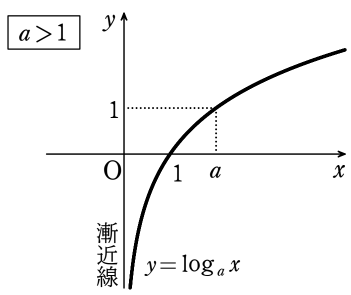
1　定義域は正の数全体，値域は実数全体

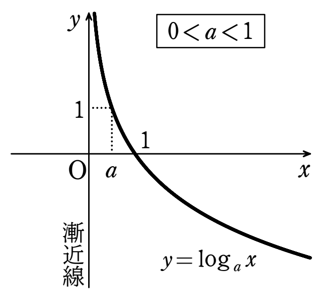
2　$a>1$ のとき増加関数　　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$

　$0<a<1$ のとき減少関数　　$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

3　$y=\log_a x$ のグラフは y 軸を漸近線としてもち，2 点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る。

4　$y=\log_a x$ のグラフは，指数関数 $y=a^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である。





３１　常用対数

1　常用対数

10 を底とする対数を **常用対数** という。

$M=a\times 10^n$（n は整数，$1 \leqq a<10$）とすると　$\log_{10} M=\log_{10} a+n$

2　常用対数の応用

1　正の数 N と自然数 k について

N の整数部分が k 桁 $\iff 10^{k-1} \leqq N<10^k$

$\iff k-1 \leqq \log_{10} N<k$

2　$0<M<1$ である小数 M と自然数 k について

M の小数第 k 位に初めて 0 でない数字が現れる

$\iff 10^{-k} \leqq M<10^{-k+1}$

$\iff -k \leqq \log_{10} M<-k+1$