第3章　2次関数

11　関数とグラフ

1　関数

1　2つの変数 x，y について，x の値を定めるとそれに対応して y の値がただ1つ定まるとき，y は x の **関数** であるという。

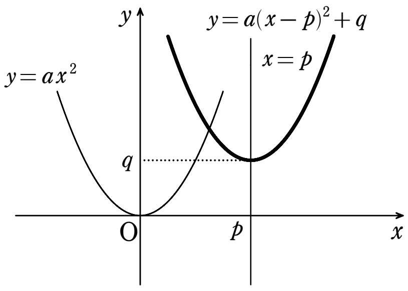
2　1次関数，2次関数の一般形　　a，b，c は定数とする。
1次関数は　　$y=ax+b$　　　　ただし，$a \neq 0$
2次関数は　　$y=ax^2+bx+c$　　ただし，$a \neq 0$

3　y が x の関数であるとき，y を表す x の式を $f(x)$ や $g(x)$ のように書く。
関数 $y=f(x)$ について，変数 x のとりうる値の範囲を，関数 $f(x)$ の **定義域** という。また，定義域の x の値に対応して y がとる値の範囲を，関数 $f(x)$ の **値域** という。

12　2次関数のグラフ

1　2次関数 $y=ax^2$ のグラフ

1　軸が y 軸，頂点が原点の放物線である。
2　$a>0$ のとき　下に凸，
　$a<0$ のとき　上に凸



2　2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。
その軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ q)$ である。

3　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形すると $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ であるから

軸は　直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，　　頂点は　点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

2次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを，**平方完成** するという。

研究　グラフの平行移動・対称移動

関数 $y=f(x)$ のグラフについて

1　x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，次のような関数のグラフになる。
$y-q=f(x-p)$　　すなわち　$y=f(x-p)+q$

2　x 軸，y 軸，原点に関して対称移動すると，次のような関数のグラフになる。
x 軸：$-y=f(x)$　　すなわち　$y=-f(x)$
y 軸：$y=f(-x)$
x 軸：$-y=f(-x)$　すなわち　$y=-f(-x)$

13　2次関数の最大・最小

1　2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小

$a>0$ のとき，$x=p$ で最小値 q をとる。最大値はない。
$a<0$ のとき，$x=p$ で最大値 q をとる。最小値はない。

2　定義域に制限のある場合の関数の最大・最小

グラフをかいて，頂点の位置，定義域の両端における y の値に注目する。

3　最大・最小の応用（文章題）

① 何を変数 (x) にするかを決め，そのとりうる値の範囲（定義域）を定める。
② 最大・最小を求めようとする量 (y) を，変数 (x) を用いて表す。
③ 変数 (x) の定義域に注意して，② で表した関数（x の式 y）の最大・最小を求める。

注　$y \geqq 0$ のとき，y の最大・最小を求めるのに，まず y^2 の最大・最小を求めると簡単な場合もある。このとき，次が成り立つことを利用する。
$A \geqq 0$，$B \geqq 0$ のとき　　$A<B \iff A^2<B^2$

14　2次関数の決定

1　2次関数の決定

1　与えられた条件によって，求める2次関数を適した形において，未定の係数を定める。
[1]　$y=a(x-p)^2+q$　　　[2]　$y=ax^2+bx+c$

2　$y=f(x)$ のグラフが点 $(s,\ t)$ を通る。 $\iff$ 等式 $t=f(s)$ が成り立つ。

2　連立3元1次方程式の解き方

① 1文字を消去して，残り2文字の連立方程式を導く。
② 2文字の連立方程式を解く。
③ 残りの1文字の値を求める。

15　2次方程式

1　2次方程式の解き方

1　**因数分解**　次の性質を用いる。
実数 A，B について　　$AB=0 \iff A=0$ または $B=0$

2　$a>0$ のとき，$x^2=a$ の解は　　$x=\pm\sqrt{a}$

3　**解の公式**　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は
$b^2-4ac \geqq 0$ のとき実数解をもち　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$b=2b'$ ならば $b'^2-ac \geqq 0$ のとき実数解をもち　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

2　2次方程式の係数と実数解

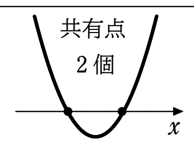
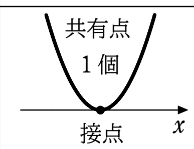
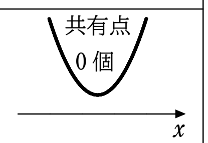
2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について，**判別式** を $D=b^2-4ac$ とすると，次のことが成り立つ。

$D>0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ
$D=0 \iff$ ただ1つの実数解（重解）をもつ
（以上2つについて）$D \geqq 0 \iff$ 実数解をもつ
$D<0 \iff$ 実数解をもたない

注　$b=2b'$ のとき，D の代わりに $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ の符号を調べても，同様のことが成り立つ。

16　2次関数のグラフと x 軸の位置関係

1　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
x 軸との位置関係	異なる2点で交わる	接する	共有点をもたない
$a>0$ のときグラフと x 軸との共有点の個数			
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=-\dfrac{b}{2a}$	実数解はない

・2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について
　グラフと x 軸の共有点の x 座標 = 方程式の実数解
　グラフと x 軸の共有点の個数 = 方程式の実数解の個数
・2次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフは，x 軸と2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わる。

発展　放物線と直線の共有点の座標

1　放物線と直線の共有点

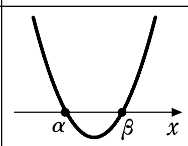
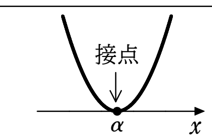
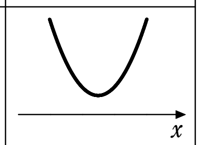
1　放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ の共有点の x 座標
$\longleftrightarrow$ 2次方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ の実数解

2　1において，共有点の個数と2次方程式の実数解の個数は一致する。
放物線と直線が異なる2点で交わる $\iff$ 異なる2つの実数解をもつ $(D>0)$
放物線と直線が接する $\iff$ 重解をもつ $(D=0)$
放物線と直線が共有点をもたない $\iff$ 実数解をもたない $(D<0)$

17　2次不等式

1　2次不等式の解

1　$a>0$ とする。

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x=\alpha,\ \beta$	$x=\alpha$	実数解はない
$ax^2+bx+c>0$ の解	$x<\alpha,\ \beta<x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c \geqq 0$ の解	$x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c<0$ の解	$\alpha<x<\beta$	解はない	解はない
$ax^2+bx+c \leqq 0$ の解	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x=\alpha$	解はない

$a<0$ のときは，不等式の両辺に -1 を掛けて，x^2 の係数を正にして考える。

2　$\alpha<\beta$ のとき　$(x-\alpha)(x-\beta)>0$ の解は　$x<\alpha$，$\beta<x$
　　　　　　　　$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$
$(x-\alpha)^2>0$ の解は　α 以外のすべての実数
$(x-\alpha)^2<0$ の解は　ない

3　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ に対して

常に $ax^2+bx+c>0 \iff a>0$ かつ $D=b^2-4ac<0$

常に $ax^2+bx+c<0 \iff a<0$ かつ $D=b^2-4ac<0$

研究　**絶対値を含む関数のグラフ**

1　**絶対値を含む関数のグラフ**

1　絶対値記号｜　｜内の式の符号によって場合を分けてグラフをかく。

$y=|f(x)|$ は $\begin{cases} f(x)\geqq 0 \text{ のとき} & y=f(x) \\ f(x)<0 \text{ のとき} & y=-f(x) \end{cases}$

2　関数 $y=|f(x)|$ のグラフは，関数 $y=f(x)$ のグラフで x 軸より下側の部分を x 軸に関して対称に折り返して得られる。