第２章　集合と命題

８　集合

$\boxed{1}$ **集合**

集合の表し方　①　{　}の中に要素を書き並べて表す。　$A=\{1, 2, 4, 8\}$

②　要素の満たす条件を書いて表す。　$A=\{x \mid x$ は8の正の約数$\}$

$x \in A$（x は A に属する）　x が集合 A の要素である

$x \notin A$　x が集合 A の要素でない

$A \subset B$（A は B の**部分集合**）　集合 A のすべての要素が集合 B の要素でもある

$A=B$（A と B は**等しい**）　集合 A と B の要素がすべて一致している

$\varnothing$（**空集合**）　要素が１つもない集合

$\boxed{2}$ **共通部分と和集合**

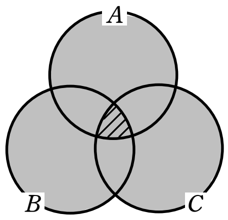
１　$A \cap B$（A と B の**共通部分**）　集合 A，B のどちらにも属する要素全体の集合

$A \cup B$（A と B の**和集合**）　集合 A，B の少なくとも一方に属する要素全体の集合

２　**３つの集合の共通部分と和集合**

$A \cap B \cap C$（**共通部分**）　集合 A，B，C のすべてに属する要素全体の集合

$A \cup B \cup C$（**和集合**）　集合 A，B，C の少なくとも１つに属する要素全体の集合



$A \cap B \cap C$

$A \cup B \cup C$

$\boxed{3}$ **補集合**

$\overline{A}$（**補集合**）　全体集合 U の部分集合 A に対して U の要素で A には属さない要素全体の集合

ド・モルガンの法則　１　$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$

２　$\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$

９　命題と条件

$\boxed{1}$ **命題と条件**

命題　正しい（**真**）か正しくない（**偽**）かが定まる文や式を **命題** という。

条件　文字（x など）を含んだ文や式で，文字に値を代入することで真偽が定まるものを，（x に関する）**条件** という。

条件を考える場合には，条件に含まれる文字がどんな集合の要素かをはっきりさせておく。この集合を，その条件の **全体集合** という。

$\boxed{2}$ **命題 $p \Longrightarrow q$**

１　命題 $p \Longrightarrow q$ は，「p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す。

p を **仮定**，q を **結論** という。

２　条件 p を満たすもの全体の集合を P，条件 q を満たすもの全体の集合を Q とするとき，「命題 $p \Longrightarrow q$ が真である」と「$P \subset Q$ が成り立つ」とは同じことである。

反例　偽である命題 $p \Longrightarrow q$ において，p を満たすが q を満たさないものを **反例** という。命題が偽であることを示すには，反例を１つだけあげればよい。

$\boxed{3}$ **必要条件と十分条件**

２つの条件 p，q について，命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，

p は q であるための **十分条件** である，

q は p であるための **必要条件** である

という。

同値　２つの条件 p，q について，$p \Longleftrightarrow q$（$p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$）が成り立つとき，p は q であるための（q は p であるための）**必要十分条件** であるという。

このとき，p と q は **同値** であるという。

$\boxed{4}$ **条件の否定**

否定　条件 p に対して，「p でない」という条件を p の **否定** といい，$\overline{p}$ で表す。

「かつ」の否定，「または」の否定　条件 p，q に対して，次が成り立つ。

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Longleftrightarrow \overline{p} \text{ または } \overline{q}$$

$$\overline{p \text{ または } q} \Longleftrightarrow \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$$

１０　命題と証明

$\boxed{1}$ **命題の逆，対偶，裏**

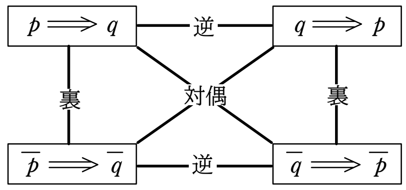
命題 $p \Longrightarrow q$ に対して

$q \Longrightarrow p$　を　$p \Longrightarrow q$ の　**逆**

$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$　を　$p \Longrightarrow q$ の　**対偶**

$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$　を　$p \Longrightarrow q$ の　**裏**

という。命題 $p \Longrightarrow q$ とその逆，対偶，裏は，互いに右の図のような関係にある。



１　もとの命題が真であっても，その逆が真であるとは限らない。

２　命題 $p \Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する。

$\boxed{2}$ **対偶を利用する証明**

命題 $p \Longrightarrow q$ を証明するのに，その対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を証明してもよい。

$\boxed{3}$ **背理法を利用する証明**

命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより，もとの命題が真であると結論する。

$\boxed{\text{発展}}$ **「すべて」と「ある」の否定**

$\boxed{1}$ **命題の否定**

命題の **否定** とは，その命題が成り立たないことを表す命題である。

一般に，命題とその否定では，真偽が逆になる。

$\boxed{2}$ **「すべて」と「ある」を含む命題の否定**

命題とその否定について，次のことが成り立つ。

p は x に関する条件とする。

命題「すべての x について p」の否定は　「ある x について $\overline{p}$」

命題「ある x について p」の否定は　「すべての x について $\overline{p}$」