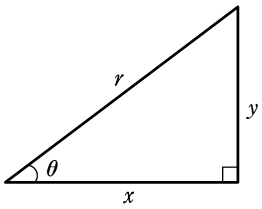
# 第４章　図形と計量

## １８　三角比

### 1　正弦・余弦・正接

右の図の直角三角形において




1　$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$（正弦），$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$（余弦），

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$（正接）

2　$y=r\sin\theta$，$x=r\cos\theta$，$y=x\tan\theta$

## １９　三角比の相互関係

### 1　三角比の相互関係　（$\theta$ は鋭角）

1　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　2　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　3　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

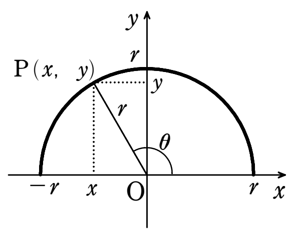
### 2　$90°-\theta$ の三角比　（$\theta$ は鋭角）

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$，　$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$，　$\tan(90°-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

## ２０　三角比の拡張

### 1　座標を用いた三角比の定義　（$0°\leqq\theta\leqq180°$）

右の図で，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$，$\mathrm{OP}=r$，$\mathrm{P}(x,\ y)$




$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，　$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

注　$\theta=90°$ のときは $x=0$ であるから，$\tan\theta\left(=\dfrac{y}{x}\right)$ は定義されない。したがって，$\tan\theta$ と書いたときには $\theta\fallingdotseq90°$ であるものとする。

### 2　三角比の符号とそのとる値の範囲　（$0°\leqq\theta\leqq180°$）

| $\theta$ | 0° | 鋭角 | 90° | 鈍角 | 180° | とる値の範囲 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | ＋ | 1 | ＋ | 0 | $0\leqq\sin\theta\leqq1$ |
| $\cos\theta$ | 1 | ＋ | 0 | － | −1 | $-1\leqq\cos\theta\leqq1$ |
| $\tan\theta$ | 0 | ＋ | ／ | － | 0 | 実数全体 |

### 3　$180°-\theta$ の三角比　（$0°\leqq\theta\leqq180°$）

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$，　$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$，　$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

### 4　三角比の相互関係　（$0°\leqq\theta\leqq180°$）

1　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　2　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　3　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

### 5　直線の傾きと正接

直線 $y=mx$ と $x$ 軸の正の向きとのなす角を $\theta$ とすると　　$m=\tan\theta$

## ２１　正弦定理・余弦定理

### 1　正弦定理

$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を $R$ とすると　　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

### 2　余弦定理

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，次が成り立つ。

1　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，　$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

2　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，　$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

### 3　三角形の角と辺の関係

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，次が成り立つ。

$b^2+c^2>a^2 \iff \cos A>0 \iff A$ は鋭角

$b^2+c^2=a^2 \iff \cos A=0 \iff A$ は直角

$b^2+c^2<a^2 \iff \cos A<0 \iff A$ は鈍角

## ２２　正弦定理と余弦定理の応用

### 1　三角形の辺と角

三角形の６つの要素（３辺，３つの角）のうち，少なくとも１つの辺を含む３つの要素が与えられたとき，残りの要素を求めることができる。

1　３辺（$a$，$b$，$c$）から
　余弦定理で角（$A$，$B$，$C$）　　なお　$C=180°-(A+B)$

2　２辺と１つの角（$a$，$b$，$C$）から
　余弦定理で辺（$c$），さらに角（$A$，$B$）

3　１辺と２つの角（$a$，$B$，$C$）から
　$A=180°-(B+C)$，正弦定理で辺（$b$，$c$）

### 2　三角形の辺と角の大小関係

三角形の２辺の大小関係は，その向かい合う角の大小関係と一致する。

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，たとえば　　$b<c \iff B<C$

三角形の最大の辺に向かい合う角が，その三角形の最大の角である。

### 補足　文字を含む分数の計算

正弦定理や余弦定理を利用して解く問題では，文字を含む分数の計算が必要になる場合がある。文字を含む分数の計算は，次のことを利用して行う。

基本性質　　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{AC}{BC}$，　$\dfrac{A\cancel{D}}{B\cancel{D}}=\dfrac{A}{B}$　（ただし，$C\fallingdotseq0$，$D\fallingdotseq0$）

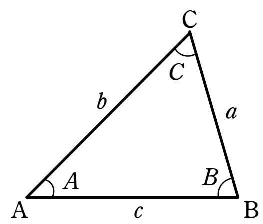
乗法・除法　　$\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$，　$\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

加法・減法　　$\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$，　$\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{A-B}{C}$

## ２３　三角形の面積

### 1　三角形の面積

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 $S$ は，次の式で表される。




$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，　$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B$，

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

### 2　三角形の内接円と面積

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を $S$，内接円の半径を $r$ とすると　$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

### 発展　ヘロンの公式

### 1　ヘロンの公式

３辺の長さが $a$，$b$，$c$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 $S$ は

$2s=a+b+c$ とすると　　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

## ２４　空間図形への応用

### 1　空間図形への応用

1　線分の長さや角の大きさは，三角形の辺や角ととらえて，三平方の定理や正弦定理，余弦定理を利用する。

2　角錐・円錐の体積

底面積 $S$，高さ $h$ の角錐・円錐の体積 $V$ は　　$V=\dfrac{1}{3}Sh$