

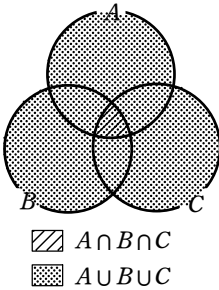
準備 集合

1 集合

集合の表し方 ① { }の中に要素を書き並べて表す。 $A=\{1, 2, 4, 8\}$
② 要素が満たすべき条件を書いて表す。 $A=\{x \mid x \text{ は } 8 \text{ の正の約数}\}$
 $x \in A$ (x は A に属する) x が集合 A の要素である
 $x \notin A$ x が集合 A の要素でない
 $A \subset B$ (A は B の部分集合) 集合 A のすべての要素が集合 B の要素でもある
 $A=B$ (A と B は等しい) 集合 A と B の要素がすべて一致している
 \varnothing (空集合) 要素が1つもない集合

2 共通部分と和集合

1 $A \cap B$ (A と B の共通部分) 集合 A, B のどちらにも属する要素全体の集合
 $A \cup B$ (A と B の和集合) 集合 A, B の少なくとも一方に属する要素全体の集合
2 3つの集合の共通部分と和集合
 $A \cap B \cap C$ (共通部分) 集合 A, B, C のすべてに属する要素全体の集合
 $A \cup B \cup C$ (和集合) 集合 A, B, C の少なくとも1つに属する要素全体の集合



3 補集合

\overline{A} (補集合) 全体集合 U の部分集合 A に対して U の要素で A には属さない要素全体の集合
ド・モルガンの法則 1 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

第1章 場合の数と確率

第1節 場合の数

1 集合の要素の個数

1 集合の要素の個数

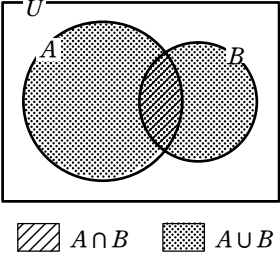
集合 A の要素の個数が有限であるとき、その個数を $n(A)$ で表す。

1 和集合の要素の個数

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
とくに $A \cap B = \varnothing$ のとき
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

2 補集合の要素の個数

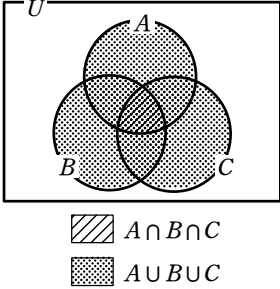
$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$ ただし、 U は全体集合
【参考】 $n(\overline{A \cap B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$
 $n(\overline{A \cup B}) = n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B)$



【研究】 3つの集合の和集合の要素の個数

1 3つの集合の和集合の要素の個数

全体集合 U の3つの部分集合 A, B, C について、次の等式が成り立つ。
 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$



2 場合の数

1 樹形図

各場合を枝分かれの図で表す方法。

2 和の法則

2つの事柄 A と B の起こり方に重複はないとする。 A の起こり方が a 通りあり、 B の起こり方が b 通りあれば、 A または B の起こる場合は、 $a + b$ 通りある。
3つ以上の事柄についても、同様な法則が成り立つ。

3 積の法則

事柄 A の起こり方が a 通りあり、そのどの場合に対しても事柄 B の起こり方が b 通りあれば、 A が起こり、そして B が起こる場合は、 $a \times b$ 通りある。
3つ以上の事柄についても、同様な法則が成り立つ。

3 順列

1 順列

n 個から r 個取る順列 (異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列) の総数は ${}_n P_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$ (r 個の数の積)
とくに ${}_n P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ (n の階乗)
また、 ${}_n P_0 = 1$, $0! = 1$ と定めると、 ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ とも表される。
異なる n 個すべてを並べる順列の総数は $n!$ 通り

2 円順列

異なる n 個の円順列 (ものを円形に並べる順列) の総数は $(n-1)!$ 通り

3 重複順列

n 個から r 個取る重複順列 (異なる n 個のものから重複を許して r 個取って並べる順列) の総数は n^r 通り

4 組合せ

1 組合せ

n 個から r 個取る組合せ (異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して作る組合せ) の総数は ${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r(r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$ (分母、分子ともに r 個の数の積)
とくに ${}_n C_n = 1$
また、 $0! = 1$, ${}_n C_0 = 1$ と定めると、 ${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ とも表される。

${}_n C_r$ の性質 ${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$

2 同じものを含む順列

a が p 個、 b が q 個、 c が r 個あるとき、それら全部を1列に並べる順列の総数は
 ${}_n C_p \times {}_{n-p} C_q = \frac{n!}{p!q!r!}$ ただし $p+q+r=n$
一般に、 n 個のもののうち、 p 個は同じもの、 q 個は別の同じもの、 r 個はまた別の同じもの、…… であるとき、これら n 個のもの全部を1列に並べる順列の総数は
 $\frac{n!}{p!q!r! \cdots}$ ただし $p+q+r+\cdots=n$

【研究】 重複を許して作る組合せ

1 重複を許して作る組合せ

異なる n 個のものから重複を許して r 個取って作る組合せ (重複組合せ) の総数は
 ${}_{(n-1)+r} C_r$ すなわち ${}_{n+r-1} C_r$

第2節 確率

5 事象と確率

1 試行と事象

1 同じ条件のもとで繰り返すことができる実験や観測を 試行 という。
また、試行の結果として起こる事柄を 事象 という。
2 1つの試行において、起こりうる結果全体を集合 U で表すとき、 U 自身で表される事象を 全事象、 U のただ1つの要素からなる集合で表される事象を 根元事象 という。

2 確率

ある試行におけるすべての根元事象が同様に確からしいとする。このとき、事象 A の確率 $P(A)$ は
 $P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{n(A)}{n(U)}$ ただし、 U は全事象

6 確率の基本性質

1 確率の基本性質

1 どのような事象 A についても $0 \leq P(A) \leq 1$
とくに、空事象 \varnothing について $P(\varnothing) = 0$ 全事象 U について $P(U) = 1$
2 確率の加法定理
事象 A, B が互いに排反であるとき
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
事象 A, B, C が互いに排反 (どの2つの事象も互いに排反) であるとき、3つの事象のいずれかが起こる確率 $P(A \cup B \cup C)$ は
 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

2 余事象と確率

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ すなわち $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3 一般の和事象の確率

2つの事象 A, B について $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7 独立な試行と確率

1 独立な試行の確率

- 1 いくつかの試行において、どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき、これらの試行は **独立** であるという。
- 2 2つの試行 S と T が独立であるとき、 S で事象 A が起こり、かつ T で事象 B が起こる確率 p は、 $P(A)$ と $P(B)$ の積に等しい。すなわち $p = P(A) \times P(B)$
独立な3つ以上の試行についても、同様なことが成り立つ。

2 反復試行の確率

1回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。この試行を n 回行う反復試行で、 A がちょうど r 回起こる確率は ${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$

8 条件付き確率

1 条件付き確率

1つの試行における2つの事象 A, B について、事象 A が起こったとして、そのときに事象 B の起こる確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{ただし } n(A) \neq 0, P(A) \neq 0$$

(A が起こったときの B が起こる条件付き確率)

2 確率の乗法定理

$P(A) \neq 0$ のとき、2つの事象 A, B がともに起こる確率は

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$$